

PAPIROFLEXIA Y PROPORCIONES DINÁMICAS DE RECTÁNGULOS

C. Collantes

C.P.R. 1, Valladolid

E. Reyes

E.T.S. Arquitectura, Valladolid.

En esta comunicación pretendemos aportar a la enseñanza de la Geometría plana unos ejemplos de construcción de rectángulos con proporción irracional, justificando mediante pruebas matemáticas tales construcciones y las proporciones dinámicas que se derivan de ellas.

Definición 1. Dado un rectángulo R de lados “a” y “b” se define proporción del rectángulo R como: $p(R) = p(a,b) = \frac{\text{Máx}(a,b)}{\text{mín}(a,b)}$.

Definición 2. Un rectángulo se llama estético si su proporción es conmensurable, racional o estética.

Definición 3. Decimos que un rectángulo es dinámico si su proporción es inconmensurable, irracional o dinámica.

Definición 4. Se llaman rectángulos recíprocos internos los que se obtienen a partir de un rectángulo dado, trazando las perpendiculares a cada diagonal desde los vértices que no la determinan.

Como caso particular de rectángulos dinámicos y recíprocos internos, consideramos los rectángulos en proporción $\sqrt{n}$. Estos rectángulos son los únicos que pueden generarse como reunión de n veces el rectángulo recíproco interno.

En efecto: Al dividir un rectángulo en proporción $\sqrt{n}$ en n partes resultan n rectángulos en proporción $\frac{1}{\sqrt{n}/n} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Recíprocamente, si un rectángulo de lados a y b , ($a < b$) está formado por n rectángulos de proporción b/a , siendo $p(a,b) = p(a, b/n)$, se verifica:

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b/n} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{na}{b}; b^2 = na^2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{n}$. De este resultado se deduce que un rectángulo en proporción $\sqrt{n}$ puede subdividirse indefinidamente en una serie decreciente de subrectángulos en la misma proporción, dividiendo el lado mayor en n partes iguales.

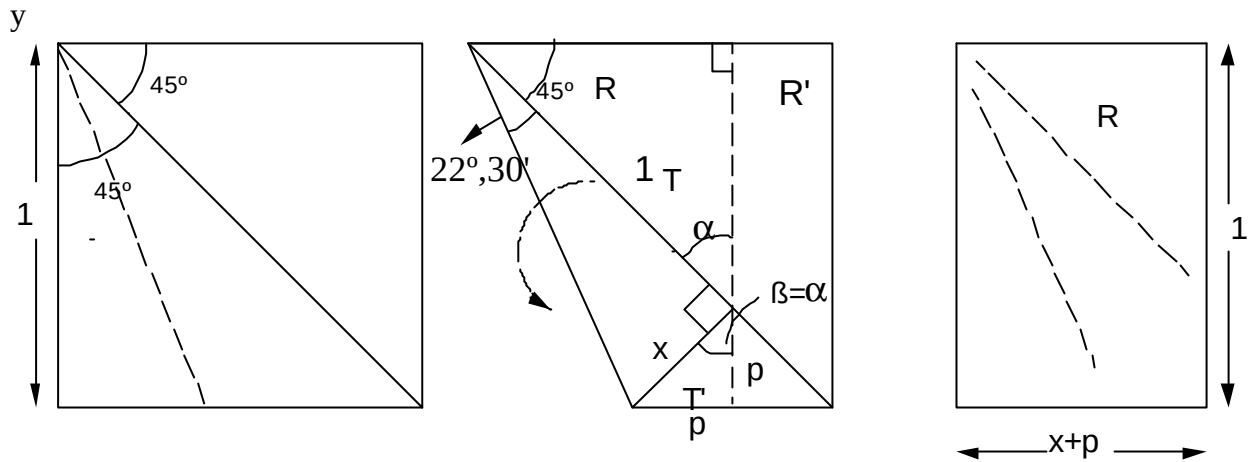
Esta subdivisión a partir de un rectángulo en proporción $\sqrt{2}$ sugirió a Porstmann la normalización de los formatos DIN.

1. Construcción del rectángulo de proporción $\sqrt{2}$, o rectángulo $\sqrt{2} : 1$

La construcción del rectángulo $\sqrt{2}$ se puede hacer a partir de diversos formatos de papel; aquí partimos de un **cuadrado** y procedemos de la siguiente manera:

- 1) Se traza una diagonal en dicho cuadrado.
- 2) Se biseca el ángulo de 45° y se dobla por dicha bisectriz de forma que la esquina inferior del cuadrado incida en la diagonal.
- 3) Por el punto determinado por la intersección anterior, se dobla paralelamente a los lados verticales del cuadrado.
- 4) El rectángulo mayor, R, así obtenido es un rectángulo en proporción $\sqrt{2}$.

Demostración:



Supongamos que el lado del cuadrado mide 1 y sea $x = \operatorname{tg} 22^{\circ}30'$.

$$x = \operatorname{tg} \frac{p}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos p/4}{1 + \cos p/4}} = \sqrt{\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}} = \sqrt{2} - 1$$

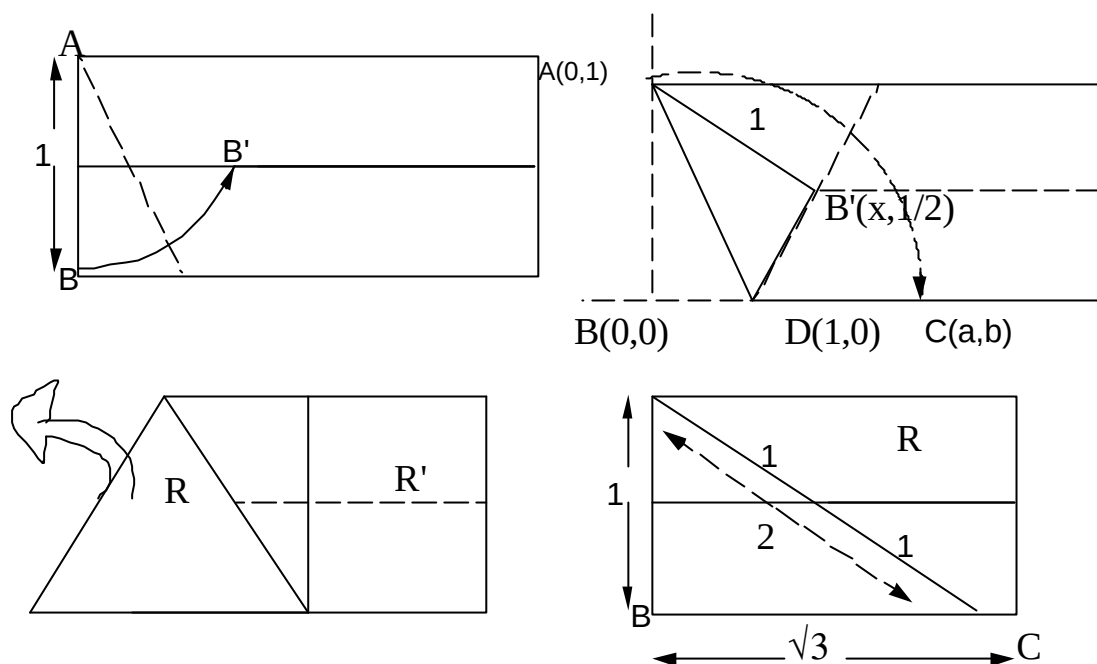
El triángulo inferior, T' , determinado por la construcción, es rectángulo e isósceles, ya que el triángulo superior T tiene por ángulos: 90° , 45° y por tanto el tercer ángulo mide 45° . En consecuencia T' tiene los mismos ángulos.

Por ser T' isósceles: $x^2 = 2p^2$, luego $p = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$; $p = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Proporción de } R = p(R) = \frac{1}{x + p} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

2. Construcción del rectángulo de proporción $\sqrt{3}$, o rectángulo $\sqrt{3}:1$

- 1) Se toma un rectángulo de lados 1 y L de forma que la razón entre el lado mayor y el menor sea mayor que $\sqrt{3}$.
- 2) Marcamos, mediante un doblez, la mediana mayor de dicho rectángulo.
- 3) Doblamos el papel desde el vértice superior, A, del rectángulo, de forma que el vértice inferior correspondiente B incida en la mediana en el punto B'.
- 4) Doblamos siguiendo la recta determinada por el cateto menor del triángulo rectángulo hasta que el vértice A llegue a la base del rectángulo.
- 5) Este último doblez determina un punto C sobre la base del rectángulo inicial. Levantando la perpendicular por este punto, tenemos dos nuevos rectángulos R y R'.
- 6) El rectángulo R tiene proporción $\sqrt{3}$.



Demostración: Si B' tiene de coordenadas $(x, 1/2)$ en el sistema de referencia $B = (0,0)$, $A = (0,1)$, $D = (1,0)$, se verifica $d(A, B') = 1$, es decir:

$$x^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ luego } \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1+b}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 0$$

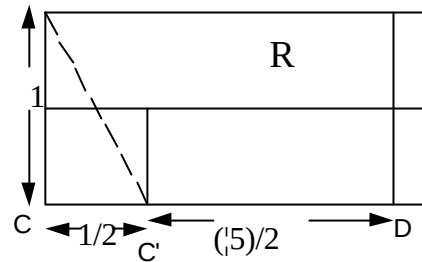
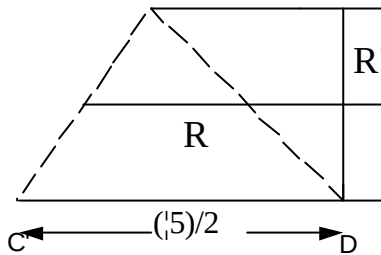
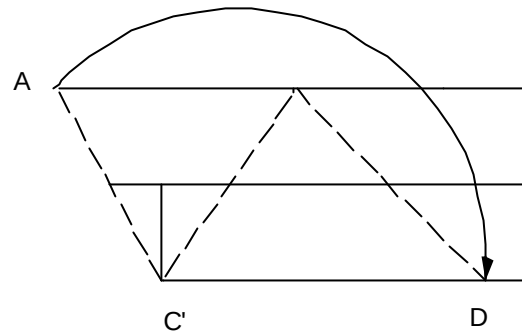
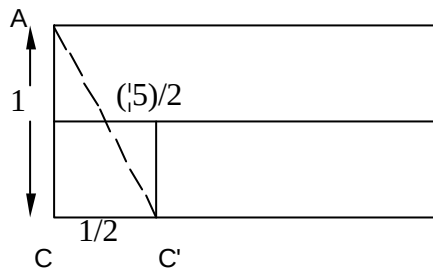
El vértice C del rectángulo tiene de coordenadas $(a,b) = (\sqrt{3}, 0)$

Siendo b el lado mayor de R , se verifica que:

$$b^2 = (1+1)^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3} \Rightarrow p(R) = \sqrt{3}.$$

3. Construcción del rectángulo áureo o rectángulo en proporción $f = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- 1) Se toma un rectángulo de lados l y L de forma que la razón entre el lado mayor y el menor sea mayor que ϕ .
- 2) Se traza longitudinalmente la mediana del rectángulo.
- 3) Desde la esquina inferior izquierda del rectángulo hasta la mediana, construimos un cuadrado.
- 4) Uniendo el vértice superior A del rectángulo con el vértice inferior derecho C' del cuadrado y doblando por esta recta, se determina un triángulo. Transportando sobre la base del rectángulo el segmento AC' se obtiene un punto D en el lado mayor del rectángulo.
- 5) La perpendicular por dicho punto a la base del rectángulo inicial, genera dos rectángulos R y R' .
- 6) El rectángulo R es áureo.

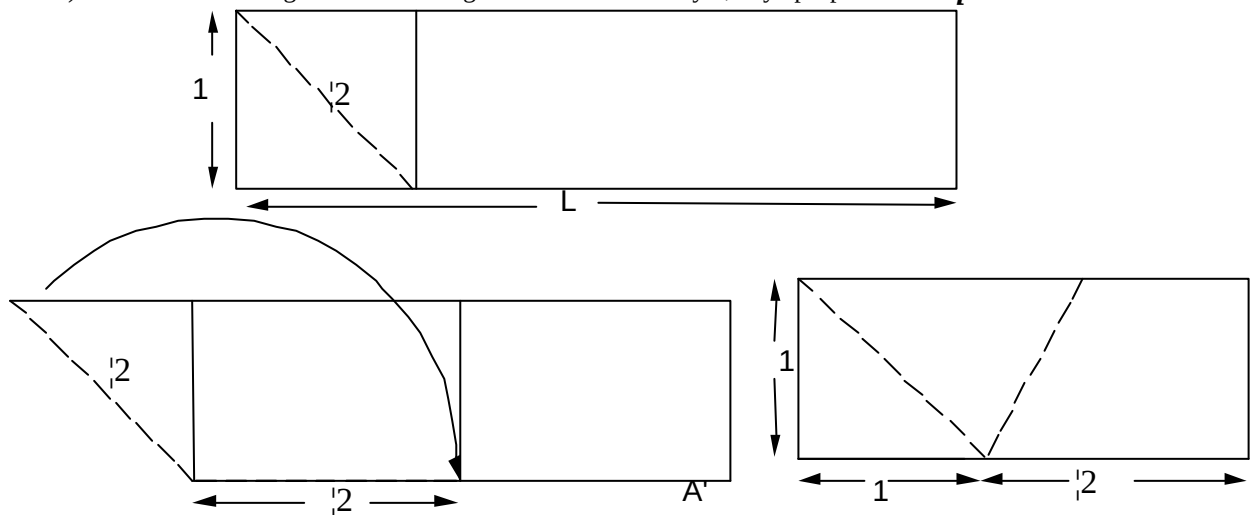


Demostración: Supongamos que el lado menor del rectángulo, l , es 1.

El segmento AC' mide $\frac{\sqrt{5}}{2}$. La proporción del rectángulo R es $p(R) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = f$.

Construcción del rectángulo $q = 1 + \sqrt{2}$

- 1) Se toma un rectángulo de lados l y L de forma que la razón entre el lado mayor y el menor sea mayor que $q = 1 + \sqrt{2}$.
- 2) Construimos un cuadrado de lado l . (Supongamos $l = 1$)
- 3) Trazamos su diagonal y abatimos dicha diagonal sobre L transportando la medida de la diagonal $\sqrt{2}$.
- 4) Desdoblado se genera un rectángulo de lados $1 + \sqrt{2}$ y 1 , cuya proporción es q .



Los números $q = 1 + \sqrt{2}$ y $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ forman parte de una familia de números de la forma

$x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$, $a \in \mathbb{N}$, solución positiva de la ecuación $x^2 - ax - 1 = 0$, obteniéndose para $a=1$ el

número de oro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, para $a = 2$ el número $q = 1 + \sqrt{2}$, para $a=3$, $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, para $a = 4$,
 $x = 2 + \sqrt{5} = f^3$, etc...

BIBLIOGRAFÍA

Alsina Trillas, *Lecciones de Algebra y Geometría*, Gustavo-Gili, 1984.

Ghyka, M. *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las artes*, Poseidón, 1977.