

POLITRIÁNGULOS

Juan Antonio Hans Martín

C.C. Sta. M^a de los Reyes

José Muñoz Santonja

I.E.S. Macarena

Miembros del Grupo Alquerque-Sevilla y de la S.A.E.M. THALES

Los antecedentes.

Uno de los materiales manipulativos más atractivos para trabajar aspectos geométricos en nuestras clases son los pentominós. Es fácil distinguir cuándo algún elemento matemático es aceptado por el público en general, basta recorrer cualquier tienda de juegos y ver que se encuentra allí, por supuesto, sin aprovechar todo su potencial educativo. Cuando nosotros lo presentamos en nuestros talleres, siempre aparece algún alumno que lo tiene o conoce como juguete de entretenimiento.

Los pentominós están formados por doce piezas siendo cada una de ellas la unión de cinco cuadrados iguales, con la condición de que cada dos de ellos deben estar unidos por un lado completo. Haciendo el estudio es fácil llegar a la construcción de esas doce piezas que son las únicas que existen en el espacio. El creador de este pasatiempo matemático fue el profesor Solomon W. Golomb que publicó un libro en 1965 de título "Poliminós", aunque este término ya lo creó doce años antes cuando era estudiante de Harvard.

En clase, la actividad de ir creando los poliminós desde los de dos cuadrados (dominós) en adelante, gusta mucho a los alumnos. Se sienten especialmente atraídos por el material cuando construyen las piezas correspondientes a los tetraminós (formados por cuatro cuadrados) y comprueban que obtienen las piezas que se utilizan en el célebre juego del "Tetris".

Triángulos en lugar de cuadrados.

El propio Golomb en 1954 en un artículo publicado en una revista americana, indicaba la posibilidad de trabajar con un puzzle parecido a los poliminós, pero basados en la unión de triángulos equiláteros de lado unidad, uniéndolos, como en el caso anterior, por un lado. Siete años más tarde el matemático T. H. O'Beirne bautizó a estas piezas con el nombre de poliamantes partiendo de una idea cercana a la creación de los poliminós.

Como dos cuadrados unidos por un lado forman una pieza de «dominó», para una generalización se utilizó el nombre de poliminós. De la misma manera, el «diamante» figura típica de la baraja francesa, está formado por dos triángulos equiláteros unidos, a partir de él se pueden crear los triamantes, tetramantes, pentamantes, etc... dando lugar a los poliamantes. Se tiene además la curiosidad de que sólo existen 12 hexamantes, el mismo número de piezas que los pentominós, que es la versión más famosa de los poliminós y la que se suele encontrar como juguete. Siguiendo en esta línea no cuesta mucho pasar a la construcción de un nuevo rompecabezas, esta vez basado en la unión de triángulos pero en lugar de equiláteros, que sean isósceles y rectángulos. Estas figuras recibirán el nombre de "poliábolos".

Existen pasatiempos parecidos a los que hemos comentado, pero basados en la unión de hexágonos de lado unidad con las piezas tituladas "polihexos", pero eso lo dejamos para un futuro escrito, pues el espacio dedicado a este artículo no nos permite ampliar más la información que vamos a dar.

En esta comunicación vamos a desarrollar el trabajo con los rompecabezas formados por triángulos, viendo su construcción y sobre todo su aprovechamiento educativo en las clases de matemáticas.

El trabajo con los politriángulos.

Aunque los dos puzzles tienen algunos aspectos distintos, hay actividades que se pueden realizar con cualquiera de ellos una vez que se tengan diseñados o contruidos. Dentro de los conocimientos matemáticos que se pueden trabajar con estas piezas podemos señalar los siguientes:

- 1) **Perímetros.** Es evidente que dentro de cada particularización de estos puzzles según el número de piezas que los formen, por ejemplo los pentamantes en el caso de cinco triángulos equiláteros, todas las piezas que aparecen tienen la misma área, pero el perímetro de cada uno de ellos es diferente. Esto permite clasificar las piezas, ordenarlas, etc...
- 2) **Simetrías y giros.** Es interesante, una vez con las piezas del rompecabezas contruidas (o al menos dibujadas) ver en cuáles de ellas existe simetrías o centros de rotación que dejen invariantes las

piezas.

3) **Ángulos.** Siguiendo con lo dicho, podemos estudiar los ángulos de giro que dejan invariantes algunas figuras, pero tiene mucho mayor aprovechamiento el estudio de los ángulos que aparecen al formar las figuras. Con facilidad, sobre todo en los poliamantes, aparecen piezas cóncavas y convexas, con los que pueden estudiarse ángulos rectos, agudos y obtusos.

4) **Figuras y teselaciones.** Aunque como juego lo principal sea hacer figuras, las que nos interesan a nosotros son aquellas que tienen alguna característica geométrica, y especialmente es conveniente elegir piezas que permitan recubrir el plano y construir teselaciones.

5) **Escalas.** Las modificaciones en las medidas plantearán problemas de cambios de unidades, con lo que se repasarán problemas de cálculo. Así, será interesante construir figuras con doble longitud, con doble área, etc...

Metodología.

Queremos pasar ahora a explicar cuáles son los pasos que seguimos con este material en nuestras clases, es decir, qué planificación tenemos organizada. Aunque posteriormente pondremos ejemplos concretos en cada uno de los puzzles, la estructura de trabajo es básicamente la misma en ambos casos.

Los aspectos a tratar en clase son los siguientes:

1) **Diseño de las piezas.** Lo primero es que los alumnos diseñen las piezas con las características que se les proponen. La forma de hacerlo es utilizando tramas, isométrica para los poliamantes y cuadrada para los poliábolos. Partimos, además, de la figura más simple y vamos ampliando el número de piezas que se unen. Siempre consideramos que las piezas están construidas en el espacio, es decir, son piezas iguales. Por tanto no cuentan las que se pueden obtener de otras por giro o simetría.

El número de piezas que forman los primeros rompecabezas aparecen a continuación:

<u>Poliamantes</u>		<u>Poliábolos</u>	
Diamantes	1	Diábolo	3
Triamantes	1	Triábolo	4
Tetramantes	3	Tetrábolos	14
Pentamantes	4	Pentábolos	30
Hexamantes	12	Hexábolos	107
Heptamantes	24		
Octamantes	66		

Los últimos elementos que aparecen están meramente como curiosidad, pero no es interesante trabajar con tantas piezas. Nosotros llegamos en nuestras clases a trabajar principalmente con hexamantes y tetrábolos. Es interesante diseñar el paso siguiente para los alumnos más adelantados en el trabajo, pero no para todos. En esta fase conviene hacer mucho hincapié en que al pasar de un nivel al siguiente, lo hagan ampliando las piezas que ya tenían y añadiéndole un nuevo triángulo en todas las formas posibles. Así se aseguran de que no se dejan ninguna pieza atrás.

2) **Estudio de las características geométricas de las piezas.** Aquí entrarían todos los aspectos que ya hemos tratado antes: perímetros, cambios de medidas, simetrías, ángulos, etc...

3) **Construcción de figuras.** Por último, utilizar las piezas como un puzzle para construir figuras, bien tomándolas todas, o sólo en parte. Hay piezas que si se repiten varias veces se obtiene la misma figura de la pieza, pero más grande.

Lo que haremos a continuación es particularizar para cada uno de los triángulos y proponer las actividades concretas a los dos puzzles cuyas piezas presentaremos.

Hexamantes.

Son las figuras construidas con seis triángulos equiláteros del mismo lado, uniendo cada dos piezas por un lado común.

A continuación, aparecen las doce piezas que existen, con el nombre que se les suele asignar (la mayoría de ellos puestos por el matemático O'Beirne).

Las actividades concretas que se pueden realizar con estos elementos son:

- 1) ¿Cuántos hexamantes hay? Dibújalos.
- 2) Haz una lista con el número de lados de cada hexamante.
- 3) Todos los hexamantes tienen la misma área, pues están contruidos por seis triángulos iguales,

- pero están limitados por distinto número de lados. ¿Cuál es el perímetro de cada hexamante?
- 4) Alguno de los hexamantes tienen eje de simetría. Indica cuáles de ellos lo tienen y cuál sería su eje de simetría.
 - 5) ¿Hay hexamantes con centro de rotación? Indícalos en caso afirmativo.
 - 6) ¿Es posible obtener todos los hexamantes a partir de tres diamantes
 - 7) ¿Se pueden descomponer todos los hexamantes en dos triamantes?
 - 8) Si los hexamantes fuesen losas ¿cuáles servirían para enlosar el suelo?
 - 9) Construye cada una de los doce hexamantes a doble escala escogiendo cuatro hexamantes.
 - 10) Construye, con los 12 hexamantes, figuras y mosaicos.

A la hora de construir figuras, se pueden realizar, tomando todas las piezas o sólo algunas de ellas (por ejemplo una estrella de seis puntas con sólo 8 hexamantes). A continuación, aparecen algunas figuras simétricas realizadas con todas las piezas.

Tetrábolos.

Son las figuras que se pueden construir con cuatro triángulos rectángulos isósceles. En total existen 14 piezas distintas que son las siguientes:

Respecto a las actividades para proponer en clase, como veremos son las mismas que se han propuesto para los hexamantes. Esquemáticamente son las siguientes:

- 1) ¿Cuántos tetrábolos hay? Dibújalos.
- 2) ¿Cuántos lados tiene cada tetrábolo?
- 3) ¿Cuál es el perímetro de cada tetrábolo?
- 4) ¿Hay tetrábolos con eje de simetría? ¿Cuáles? ¿Cuántos ejes de simetría tienen? Indícalos.
- 5) ¿Algún tetrábolo tiene centro de rotación?
- 6) ¿Se pueden descomponer todos los tetrábolos en dos diábolos?
- 7) Si los tetrábolos fuesen losas, ¿cuáles servirían para enlosar el suelo?
- 8) Si queremos enlosar el plano usando dos tetrábolos distintos, ¿cuáles nos sirven?
- 9) Escogiendo cuatro tetrábolos convenientemente, puedes construir las doce piezas del puzzle a doble escala.
- 10) Componer figuras con los catorce tetrábolos.

Elaboración de los puzzles.

A la hora de construir figuras y de realizar algunas de las actividades que se han señalado, sería deseable poder contar con las piezas de los puzzles construidas, pues es más visual que trabajar directamente con la trama.

Que nosotros conozcamos, estos puzzles no es fácil encontrarlos comercializados (a diferencia de los pentominós). Hace unos años se vendían en las tiendas de "Todo a cien" unos puzzles en plásticos de distintos colores que eran los doce hexamantes, pero como suele ocurrir en este tipo de material, una vez pasada la campaña de ventas dejan de importarse y no es posible encontrarlos en ningún sitio.

Por ello lo mejor es construirlos directamente. Puede ser un buen proyecto para la clase de Tecnología diseñar y construir las piezas del puzzle. El material para utilizar puede ser muy diverso, desde un cartón que sea grueso y no se deforme con facilidad, hasta utilizar cartón pluma o panel no muy grueso (todos ellos pueden cortarse con facilidad usando un cutter). También se pueden usar acetatos o archivadores de plásticos de distintos colores.

BIBLIOGRAFÍA

GARNER, MARTIN (1987): Comunicación extraterrestre. Madrid. Cátedra.

GARNER, MARTIN (1984): Festival mágico-matemático. Madrid. Alianza editorial.