

LAS CALCULADORAS COMO HERRAMIENTAS DIDÁCTICAS.

Juan Emilio García Jiménez.

*La mayoría de los matemáticos no saben hacer cuentas. Además, les da pena perder el tiempo haciéndolo, para eso están las calculadoras. ¿No tienes una?
- Sí, pero en el colegio no nos dejan usarla.*

Hans Magnus Enzensberger. "El diablo de los números".

Calculadoras y algoritmos son términos que van definitivamente asociados. Cada día somos más los profesores que, como Leibniz, estimamos que es indigno de personas excelentes perder horas, a la manera de esclavos, en hacer cálculos a mano. La ya importante experiencia acumulada tanto a nivel nacional como internacional, evidencian que el uso de calculadoras no produce efectos adversos en la capacidad de cálculo, ni reduce las posibilidades de comprensión matemática por parte de quien las utiliza.

Hay todavía algunos profesores y sobre todo padres que desearían que las calculadoras se prohibiesen hasta que los chicos hayan conseguido manejarse con los cálculos sin su ayuda. La solución no está en prohibirlas o utilizarlas de cualquier modo. No se trata de dejarlas que las usen para comprobar resultados, sino de cómo explotarlas para fines formativos. Se debe estudiar más bien cómo integrarlas y aprovecharlas para que los estudiantes empleen su indudable capacidad mental para que las calculadoras se conviertan en herramientas personales que incrementen su pensamiento en vez de atrofiarlo.

1. **Potenciar la estimación y el cálculo mental.** Actividades y juegos (tres en raya, atraviesa el panel, producto máximo, golf con calculadora,...) en los que la calculadora hace de catalizador de la actividad estimativa y mental.

2. **Introducir y reforzar conceptos sobre numeración decimal y operaciones.** La calculadora nos permite *anticipar muchos conceptos* y producir un aprendizaje "en espiral" como recomienda el actual currículo de matemáticas. Por ejemplo, cuando realizamos una división, pueden aparecer los decimales. También es el caso de noción de límite, para el que la calculadora aporta un acercamiento intuitivo que le servirá para construir las redes que sustentan el concepto, esto le será de gran ayuda cuando el estudiante tenga que profundizar en el concepto de límite desde una óptica más formal. Por ejemplo: Dividir entre 3. Cuando los estudiantes dividen $1:3$ aparece 0.333333 , si después multiplican por 3, esperando obtener 1, les sale 0.99999999 ...

Otras actividades para este apartado pueden ser: realizar operaciones con restricción de determinadas teclas, productos que no caben en pantalla, divisiones como $402:43$ con veinte cifras decimales,...

3. **Favorecer el gusto por los números y la capacidad numérica a partir del planteamiento y desarrollo de investigaciones.** Estudio de determinadas regularidades en períodos, a partir de un cociente dado... Dividir por 7, 17, 43, etc.

4. **Planteamiento y resolución de problemas.** En primer lugar la calculadora nos permite abordar problemas con datos reales, problemas que hasta ahora se evitaban por la dificultad operatoria que suponían los números de esos datos. Los alumnos pueden centrarse en el proceso de hallar la solución y en dar significado a la respuesta. La calculadora nos permite realizar esos tediosos cálculos con rapidez y centrar toda nuestra atención y esfuerzo en la resolución del problema. En los problemas hay mucho que hacer antes y mucho después, como señala Fielker, la calculadora solo hace los cálculos.

El mundo de los decimales tan de actualidad en un futuro inmediato por los "cambios" que nos impondrá el EURO es particularmente atractivo para la utilización de calculadoras. Veamos un ejemplo considerando el juego "Buscando el 1". que fue ensayado por Hartwig Meissener en Alemania. Para este juego sólo se dispone de una calculadora que tiene el profesor y que ha sido programada para dividir por un número cualquiera, por ejemplo el 31. Los chicos van diciendo números y el profesor pulsa a las teclas de números y al signo igual, anotando en la pizarra el número propuesto y lo que sale en pantalla después del signo igual. El objetivo es tratar de que en pantalla aparezca el 1. Con esta actividad los chicos aprenden muchas cosas sobre la notación decimal:

- la importancia relativa de los dígitos próximos a la coma decimal comparando con los que están más alejados,
- se familiarizan con los valores relativos de los números
- con cotas superiores e inferiores, desarrollando para elegir números

Si se quiere incidir en el proceso razonador de los estudiantes habrá que actuar como en este caso (en ciertos momentos sólo se usa la calculadora del profesor). De este modo tendrán que decidir sobre la operación y el

número en cada caso, apoyar sus respuestas con justificaciones o hacer objeciones a las respuestas de los demás por medio del razonamiento.

De entre las muchas posibilidades que ofrecen las calculadoras, las que más nos interesan son aquellas en que el foco de atención es la resolución de problemas. Problemas en los que se ponen en funcionamiento procedimientos como la construcción de algoritmos personales, se usa la iteración y se provocan conflictos que ponen al descubierto aspectos del conocimiento matemático de los alumnos.

ALGUNAS PROPUESTAS DE ACTIVIDADES CON CALCULADORAS

COMPRENDIENDO MEJOR NÚMEROS Y OPERACIONES.

La realización de propuestas como las siguientes permitirá al alumno comprender mejor algunos conceptos sobre las operaciones y los números, especialmente los decimales.

1.- Teclas estropeadas

1.1. Vamos a suponer que la tecla de multiplicar está estropeada y por lo tanto no la puedes utilizar. ¿Cómo multiplicarías 59×61 ? Y $5'9 \times 6'1$? ¿Y $0'8 \times 0,56$?

1.3. ¿Cómo harías la raíz de 10 sin utilizar la tecla $\sqrt{}$?

1.4. La tecla de decimales (.) está estropeada. Calcula: $2'5 \times 4'125$ y $4'25:6'125$.

1.5. Suponiendo que la tecla del 0 de tu calculadora no funcionase, ¿cómo podrías conseguir que apareciese en ella:

$$* 180 * 108 * 1080 * 1040506$$

¿Ese método servirá en el caso de que tengamos que escribir decimales?. ¿Cómo escribirías:

$$* 0'28 * 0'0028 * 0'020805 * 0'02030508$$

2. Significado de números.

2.1. Pulsando las teclas $6 : 9 =$ obtenemos $0'6666666$, ¿qué puedes hacer para obtener $0'3333333$.

2.2. Uno entre dos da $0'5$. Utiliza tu calculadora para obtener decimales mayores y menores. ¿Qué propiedad o característica deben tener las fracciones que den decimales mayores que $0'5$? ¿Y las menores? ¿Y aquellas que den decimales mayores que la unidad?

2.3. Si sumamos la unidad a los dos términos de una fracción, por ejemplo $40/80$, ¿la fracción resultante será mayor o menor que la inicial?. ¿Y si sumamos la unidad solamente a numerador o denominador? ¿Y si lo restamos?.

3. Producto de números.

3.1. El resultado de multiplicar dos números con una calculadora ha sido 23. ¿Qué números podrían ser?. ¿Uno de los números podría ser $0'07$ como el famoso agente secreto?. ...Y rizando el rizo, ¿es posible que uno de los números fuese el 1999?.

4. Sobre potencias.

4.1. Vamos a estudiar las potencias de 2,3,4 y 7. ¿En qué número termina la potencia 100 de cada uno de esos números.?

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La calculadora es una poderosa herramienta que tiene posibilidades de aplicación para analizar, abordar, plantear y resolver los problemas matemáticos.

La calculadora permite plantear problemas con datos "reales", con enunciados que tienen más conexiones con la realidad. Ya no hace falta que los problemas propuestos sean como de "laboratorio" puesto que la calculadora nos permite manejar con facilidad cualquier clase de números.

Por otra parte, una ventaja más del uso de las calculadoras es la de que si los cálculos se pueden realizar con ellas, la atención del resolutor/a puede centrarse en **los conceptos implicados** y en el método de resolución del problema en lugar de estar pendientes de la corrección de cada operación.

La utilización de la calculadora será sin duda necesaria para plantear y tratar de resolver ciertos problemas como los que presentamos a continuación. Sin ella no valdría la pena enfrascarse en largos y tediosos cálculos "a mano" para tratar de resolver el problema. La calculadora en estos problemas nos permite hacer cálculos y olvidarlos con gran rapidez, dedicando nuestro tiempo y esfuerzo para concentrarnos en el problema.

Por otra parte, la calculadora **puede ser una fuente de problemas matemáticos**. Puede transformarse en una fuente de problemas matemáticos por su propia lógica de funcionamiento e incluso por sus mismas limitaciones que nos provocan cuestiones que ponen en juego los conocimientos matemáticos que posee el estudiante.

EJEMPLOS DE ACTIVIDADES:

- 1.- Al dividir un número entero por otro número entero con una calculadora se ha obtenido el siguiente número: 0'6736. Sabemos que cada uno de los números era inferior a 1000. ¿Serás capaz de descubrirlos?.
- 2.- La suma de los cuadrados perfectos de dos números consecutivos es 1.013. ¿Cuales eran esos números?.
- 3.- Multiplicamos dos números y obtenemos 34181. ¿Cuales son esos números?.. Una variante más sencilla del problema puede ser esta: "Hallo el cuadrado de un número y obtengo 15.129, ¿cuál era el número?".
- 4.- El I.V.A. (Impuesto sobre el valor añadido) que se aplica en las compras de la mayoría de los artículos es de un 16%. Intenta encontrar una fórmula que nos sirva para transformar los PVP de diversos productos con el IVA incluido.
- 5.- ¿Cuales serán las dimensiones de un rectángulo de área 60 m^2 para que su perímetro sea el mínimo posible?.

INVESTIGACIONES NUMÉRICAS.

La calculadora es una preciosa herramienta para el desarrollo de toda clase de investigaciones numéricas por la enorme potencia de cálculo que te ofrece. El alumno sólo tiene que planificar correctamente la investigación, realizar conjeturas, someterlas a prueba y observar lo que va ocurriendo para sacar conclusiones. Ponerse a realizar una investigación, es situarse en una posición de auténtico matemático, en dónde es esencial es hacerse preguntas, ir probando y en definitiva ir tomando decisiones. porque favorecen el trabajo exploratorio previo de la situación que aporta una colección de resultados que, aunque parciales, permitirán enfocar mejor la investigación al ayudar a identificar los problemas que merece la pena ser planteados. Una vez se han identificado y enunciado esos problemas, las calculadoras facilitan la búsqueda de patrones y regularidades en la situación planteada, lo que provocará que los estudiantes emitan conjeturas que después habrán de probar.

Cuando nos enfrentamos a una investigación, la calculadora nos presta una estupenda ayuda porque favorecen el trabajo exploratorio previo de la situación y como consecuencia de ello aporta una colección de resultados que, aunque parciales, permitirán enfocar mejor la investigación al ayudar a identificar los problemas que merece la pena ser planteados. Una vez se han identificado y enunciado esos problemas, las calculadoras facilitan la búsqueda de patrones y regularidades en la situación planteada, lo que provocará que los estudiantes emitan conjeturas que después habrán de probar.

Por último, señalar que la realización de trabajos de investigación favorece el desarrollo de cualidades personales muy necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas como la perseverancia, el ser sistemático y la creatividad.

EJEMPLOS:**1.- Regularidades y períodos.**

- 1.1.- Divide por 3 varios números menores que 10 y observa los resultados. ¿Que puede ocurrir cuando dividimos por 3?.
- 1.2.- Divide por 7 los números del 1 al 10 y anota los resultados en una tabla. Observa las cifras decimales, ¿cuántos decimales distintos pueden salir?. ¿Tiene eso algo que ver con el hecho de que estemos dividiendo por 7?. ¿Puedes predecir el resultado de $28/7$ y de $45/7$?

2.- Curiosidades.

- 2.1. $73 + 37 = 110$. Múltiplo de 11.

$$1472 + 2741 = 4213. \text{ Múltiplo de 11.}$$

¿Ocurre siempre?.

- 2.2. El número 12345679 es muy curioso. Si eliges un número cualquiera, por ejemplo el 5 y los multiplicas por el 9 y por ese número, verás que aparece un número muy interesante en pantalla. Prueba con otros números (multiplicando solo por ellos o bien por ellos y por 9) y anota tus observaciones. ¿Podrías explicar por qué pasa eso precisamente con ese número?. Busca otros números que produzcan efectos similares.

3.- Divisibilidad.

- 3.1. Usa tu calculadora para hallar todos los divisores de 4.236.
- 3.2. Averigua el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 2346 y 1250.

4.- Cocientes que llenan la pantalla.

- 4.1 El cociente $25:8$ no llena la pantalla. ($25:8 = 3'125$). Sin embargo el cociente $25:7$ si que llena la pantalla ($25:7 = 3'5714286$). Investiga que cocientes llenan la pantalla y que otros no la llenan.

5.-Posibilidades con sólo seis dígitos.

A Irene le han propuesto que elija 6 dígitos cualesquiera y forme con ellos dos números, usando cada dígito sólo una vez. Busca la combinación más adecuada para obtener el mayor producto posible y también el menor.

(Estudia lo que ocurre para otro número de dígitos, empezando por un número lo más pequeño posible, por ejemplo 3).

Puedes ampliar la investigación tratando de averiguar lo que ocurre con otras operaciones.

- Las calculadoras pueden jugar un papel muy importante en una clase que estimula las investigaciones como estas:
- ¿Qué pasa cuando se multiplica un número natural por un decimal que esté entre 0'9 y 1'1?.
- Utiliza tu calculadora para buscar un número que esté entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{5}$.
- Empleando la calculadora con el divisor constante (4), divide por 4 los 10 primeros números y anota los cocientes. ¿Puedes predecir el resultado de $85/4$?
- Investigación sobre las sucesivas potencias de exponente natural de los números 2 a 9. Trata de descubrir una ley que te permita saber de antemano en qué cifra va a terminar cualquier potencia del número investigado.

Logaritmos. Introduce un número en la calculadora y seguidamente pulsa las teclas $\boxed{\log}$ [LOG]

Prueba con otros números. Anota las propiedades que vayas descubriendo.

- Pulsando las teclas 5 y $1/x$ se obtiene en la pantalla 0'2. Juega con otro compañero durante unos 10 minutos, de modo que sustituyendo el 5 por otros números, se consiga que aparezca en la pantalla el número más grande.

CONCLUSIONES

Un aspecto muy a tener en cuenta a la hora de utilizar calculadoras para la enseñanza de las Matemáticas es el de la **sensatez**. Jhon LK. Higgins en un artículo titulado “Matemáticas y sentido común” señala que lo importante no es tanto el usar calculadoras sino el cómo usarla y añade que habría que pedir a los profesores con poca imaginación el no usarlas. He aquí algunos malos usos de la calculadora:

- Dar resultados con demasiada precisión porque la calculadora nos da 8 o 10 cifras decimales. Esto dificulta el análisis del resultado cuando basta con una aproximación (algo más de ...).
- Utilizar la tecla % de la calculadora puede oscurecer el concepto de porcentaje y que se quede sin significado. Son interesantes aquellas calculadoras que después de apretar la tecla % transforman el porcentaje en decimal.
- En la introducción del concepto de raíz, suele resultar interesante la actividad consistente en "prohibir" la utilización de esa tecla y dedicar el trabajo a encontrar un número cuyo cuadrado sea el original. Esto provocará mejoras en la comprensión del concepto ya que relaciona raíz con potencia y tiene la ventaja adicional de conectar con el método de aproximaciones sucesivas y con ideas como el grado de aproximación a la solución buscada.

Una buena utilización de la calculadora que señala Higgins en el artículo citado sería la de estudiar el concepto de pi como constante. Los alumnos pueden medir la circunferencia y el diámetro de un montón de objetos cilíndricos. Con las calculadoras pueden obtener los correspondientes cocientes con 9 cifras decimales. Podrán apreciar como el valor del cociente es prácticamente el mismo siempre y que no depende como pensarían a priori del tamaño de los objetos. Esto no se podría hacer sin calculadoras porque necesitaríamos mucho tiempo para hacer 8 ó 10 divisiones con 9 decimales a mano y por las dificultades de cálculo de muchos estudiantes. La calculadora ha desplazado la atención desde los cálculos hasta la idea que hay detrás, pero no ha eliminado el proceso de pensamiento.

En el pasado tal vez porque teníamos demasiados contenidos que enseñar y poco tiempo, no se ha trabajado suficientemente la comprensión. Puesto que comprender resulta más lento y difícil, se han venido enseñando muchas matemáticas elementales de manera mecánica. El futuro en la enseñanza y aprendizaje del cálculo pasa por situar el énfasis en el cálculo mental puesto que así se mejora la aptitud numérica que se necesita para entender la aritmética, manejar calculadoras y en general para desenvolverse mejor con los números en la vida.

Hasta ahora se ha venido confundiendo conceptos de operaciones con algoritmos y estos se han identificado exclusivamente con los escritos estándar. Desde esta premisa, las calculadoras son vistas como un peligro. Y esto no es así. Los niños necesitan comprender la naturaleza de los números y procedimientos de cálculo con ellos y para la mayoría de las operaciones que necesitamos hacer en la vida diaria, los métodos de cálculo son mentales. En un artículo justamente famoso, Michael Girling escribe: "*No es necesario que enseñemos, al menos a todos los alumnos, los métodos refinados de las divisiones largas*"

El hecho de que pongamos en énfasis en las matemáticas mentales no implica que los niños realicen menos operaciones en la escuela, es seguro que harán más. Y sobre todo, lo que es importante es que lograremos que adquieran una mejor comprensión de los números en el sistema decimal de numeración y de los conceptos de las operaciones con ellos. Y en eso estamos, en comprender, hágase de modo escrito, mental o mecanizado.. Si las

matemáticas mentales ocupan el papel relevante que les corresponde en la enseñanza/aprendizaje del cálculo, la posición de las calculadoras será el complemento ideal para mejorar la adquisición de conceptos y para las operaciones más complejas.

BIBLIOGRAFÍA.

- Carrillo M. y Hernán F.: "Recursos en el aula de Matemáticas". Ed. Síntesis. Madrid.
- Dickson, L.; Brown, M. y Gibson, O.: "El aprendizaje de las Matemáticas". Ed. Labor, 1991
- Fielker, D.S. : "Usando las calculadoras con niños de 10 años". Coselleria de Educació, Cultura y Ciencia. Generalitat de Valencia.
- Girondo Pérez, Lluís. "La calculadora a Primaria: una eina didàctica". Comunicació Educativa, nº 9.
- Higgins, Jon L. "Las calculadoras y el sentido común". Arithmetic Teachers.
- Kazuko Kamii, C. "El niño reinventa la aritmética". Aprendizaje Visor, 1985.
- Maier, Eugene A.: "Destrezas matemáticas básicas o destrezas para la supervivencia escolar". Arithmetic Teachers, 1987.
- National Council of Teachers of Mathematic. Estándares Curriculares y de Evaluación.
- Plunkett, Stuart. "Descomposición y toda esa porquería". Mathematics in School 8. (Mayo 1979)
- Sowder, Judith: "Cálculo mental y aptitud numérica". Arithmetic Teachers, 36.

CALCULADORAS UTILIZADAS: MATH EXPLORER Y TI-40 COLLÈGE DE TEXAS INSTRUMENT.