

MATEMÁTICAS CON CALCULADORAS GRÁFICAS: AHORA TRES MESES, EN EL FUTURO...

Misericordia Nomen Xatruch. Proyecto T³ España.
Jordi Civit Conde. Colaborador Proyecto T³ España.

Situación

En el marco de la enseñanza secundaria obligatoria, y con el actual despliegue normativo, los alumnos realizan un conjunto de créditos comunes y escogen otros trimestrales denominados variables, según sus intereses y posibilidades, como complemento o refuerzo de los contenidos comunes de las diversas áreas.

Con el título *Matemáticas con calculadora gráfica*, se ofrece en el cuarto curso de ESO un crédito variable de ampliación del área de matemáticas. Para el trabajo en clase los alumnos disponen de una calculadora gráfica, que forma parte del aula-taller de matemáticas de que dispone el centro.

Las tres actividades de la presente comunicación corresponden a algunas de las realizadas durante el curso 1998-99 con los alumnos de este crédito variable.

Objetivos

A partir de un conjunto de actividades el alumno conoce una nueva forma de trabajar las matemáticas, totalmente experimental. De esta forma adquiere un serie de recursos que le proporcionan más seguridad en su trabajo, además tiene la oportunidad de conocer las posibilidades de cálculo, representación y automatización que ofrece la calculadora.

Estas formas de representación actúan como soporte visual para reforzar conceptos e introducir otros nuevos.

Contenido

El conjunto de actividades gira alrededor de los siguientes temas:

- Cálculos numéricos, visualización, prioridades, fracciones y decimales.
- Expresiones con variables, igualdades, identidades y ecuaciones.
- Listas de datos, propiedades y operaciones.
- Parámetros estadísticos y representación de datos.
- Ajuste lineal de una nube de puntos.
- Propiedades de las funciones.
- Optimización de situaciones.
- Introducción a la programación.

Actividad 1: Listas, representación de datos y cálculo de parámetros estadísticos

Esta práctica pretende iniciar al alumno en el manejo de colecciones de datos, el cálculo y la interpretación de parámetros estadísticos de posición y dispersión, y la representación gráfica de los datos.

Una lista se define como una colección de datos que se consideran como una unidad. Con las listas se pueden establecer relaciones, operar y ordenar.

Para comparar y estudiar las propiedades de un conjunto de datos se definen los parámetros estadísticos y el conjunto de métodos y técnicas que se utilizan para el estudio se denomina estadística.

Con las listas se realizan también diversos tipos de gráficas que visualizan las características de los datos que contienen.

Para estudiar, por ejemplo, el peso de un grupo de personas de edades comprendidas entre los 14 y los 16 años, se recogen los siguientes datos y se introducen en la lista L1: 45, 46, 54, 53, 61, 76, 47, 56, 55, 63, 49, 52, 55, 62, 70, 54, 48, 53, 63, 59, 48

Con el objetivo de resumir las características del conjunto de datos se definen unos parámetros llamados de posición.

En primer lugar, mediante las opciones de cálculo sobre las listas, se ordenan de forma ascendente los datos y se observa cual es el valor o valores centrales de la lista. El valor central es la mediana y verifica que el número de datos menores a este valor es igual al número de datos mayores. En este caso correspondería al término onceavo de la lista que resulta ser 54.

L1	L2	L3	1
45	-----	-----	
46			
54			
53			
61			
76			
47			
L1(1)=45			

2000	CALC TESTS
1:	Edit...
2:	SortA(
3:	SortD(
4:	ClrList
5:	SetUpEditor

SortA(L1)	Done
-----------	------

L1	L2	L3	1
48			
48			
48			
48			
48			
48			
48			
48			
48			
48			
L1(11)=54			

Después se observa la primera mitad de los datos, los diez primeros valores, los términos quinto y sexto son los centrales, la media aritmética de estos valores se llama primer cuartil Q1, en este ejemplo sería 48,5. De forma análoga, a la segunda mitad de los valores centrales corresponde el tercer cuartil Q3, resulta 61,5. Las opciones de cálculo estadístico permiten comprobar los valores de estos parámetros.

L1	L2	L3	1
45	-----	-----	
46			
47			
48			
48			
48			
49			
52			
L1(5)=48			

L1	L2	L3	1
58			
59			
62			
62			
62			
62			
70			
76			
L1(16)=61			

1-Var Stats L1

1-Var Stats
fn=21
minX=45
Q1=48.5
Med=54
Q3=61.5
maxX=76

Las opciones de representación gráfica, en este caso los diagramas de caja, visualizan el conjunto de datos y estos parámetros de posición. Se pueden ver los valores máximo y mínimo entre los que oscila la distribución y la mediana en el interior de la caja, entre los cuartiles Q1 y Q3.

Plot1	Plot2	Plot3
On	Off	Off
Type: ▽	▽	▽
Xlist: L1		
Freq: 1		

2000	MEMORY
3:	Zoom Out
4:	ZDecimal
5:	ZSquare
6:	ZStandard
7:	ZTrig
8:	ZInteger
9:	ZoomStat

P1:L1
Q1=48.5

P1:L1
Med=54

Si se suman todos los valores de la lista y después se dividen por 21, se obtiene la media aritmética del conjunto de datos.

Escogiendo una ventana adecuada podemos observar los datos con un diagrama de barras, en el que también dibujamos una línea vertical correspondiente al valor de la media aritmética. Esta línea vertical correspondería al punto de equilibrio de la distribución.

sum(L1)	1169
Ans/21	55.66666667

1-Var Stats
$\bar{x}$ =55.66666667
Σx =1169
Σx^2 =66359
Sx =8.014570065
σx =7.821419511
fn=21

WINDOW
Xmin=40
Xmax=80
Xscl=5
Ymin=-1
Ymax=8
Yscl=5
Xres=1

P1:L1
min=50
max=55
n=5

Para calcular un parámetro estadístico que mida la dispersión de un conjunto de datos se calculan las desviaciones de cada valor respecto la media aritmética.

L1	L2	L3	2
45	-----	-----	
46			
47			
48			
48			
49			
52			
L2=L1- $\bar{x}$			

L1	L2	L3	3
45	-10.67	-----	
46	-9.667		
47	-8.667		
48	-7.667		
48	-7.667		
49	-6.667		
52	-3.667		
L3=L2 ²			

L1	L2	L3	3
45	-10.67	113.7777777	
46	-9.667	93.444	
47	-8.667	75.111	
48	-7.667	58.778	
48	-7.667	58.778	
49	-6.667	44.444	
52	-3.667	13.444	
L3(1)=113.7777777...			

sum(L3)	1284.666667
Ans/21	61.17460317
$\sqrt{\text{Ans}}$	7.821419511

En la lista L2 se obtienen estas desviaciones con la fórmula $L1 - \bar{x}$, y la lista L3 contiene el cuadrado de estas desviaciones. Se suman todos los elementos de la lista L3 y se dividen por 21, finalmente la raíz cuadrada de este valor corresponde a la desviación estándar de la distribución.

Actividad 2: Representación gráfica de funciones

En la introducción de las funciones lineales y cuadráticas es conveniente el uso de funciones que provienen de una relación real existente entre dos variables, que representan valores concretos. En esta actividad la calculadora gráfica simplifica los cálculos y permite visualizar una situación.

Una empresa de seguros tiene contratadas 50 pólizas de 24.500 pesetas cada una. Por cada aumento de 2000 pesetas en la póliza pierde un cliente.

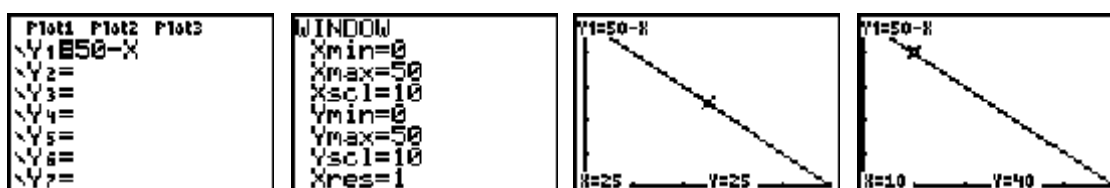
Es necesario obtener expresiones que relacionen el número de aumentos y el total de clientes, y también el número de aumentos y el precio de la póliza.

A partir de estas relaciones o funciones, y de forma gráfica, observar el conjunto de valores. Finalmente hallar la función que a partir del número de aumentos da el total de ingresos y optimizar esta función, es decir, responder la pregunta:

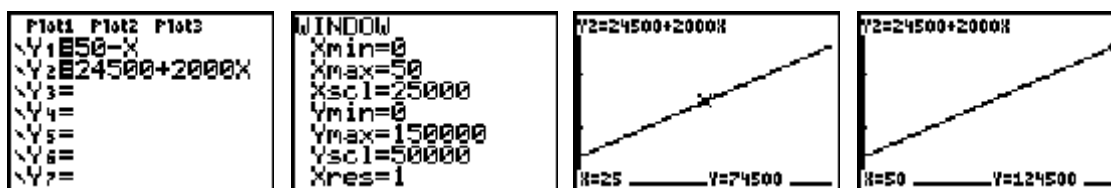
¿Qué cantidad de aumentos debe realizarse de forma que los ingresos totales sean máximos?

Finalmente, como varían los ingresos totales según el valor establecido de cada aumento?

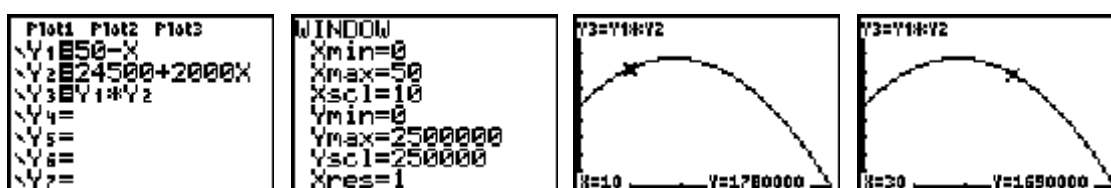
Si X representa el número de aumentos, la primera función $Y1$ da el total de clientes, X toma valores de 0 a 50, y es necesario escoger una ventana adecuada para la representación gráfica, recorrer la recta y observar los valores obtenidos.



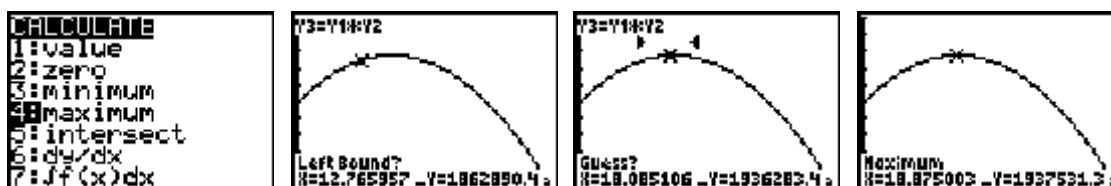
Con un proceso análogo se define y representa la función $Y2$, que corresponde al valor de la póliza. En este caso se obtiene una recta de pendiente positiva. Los valores que toma X son los mismos, pero no las imágenes, esto significa que la ventana de visualización será distinta.



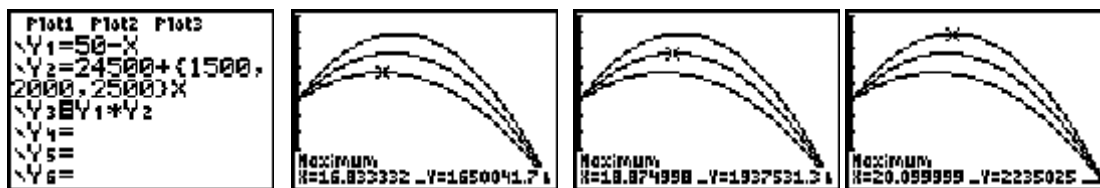
La función que resulta de multiplicar $Y1$ y $Y2$ representa los ingresos totales para cada aumento. En el editor de funciones se puede obtener directamente la función producto.



Con el producto de las dos funciones lineales se obtiene una función de segundo grado y con una ventana adecuada podemos ver la parábola correspondiente. Repasando los valores se observa que existirá un valor máximo que corresponde al vértice de la parábola. Con las opciones de cálculo se puede conseguir este valor.



Vamos a modificar el valor de cada aumento, en este caso los ingresos totales son diferentes. Para observar estas variaciones representamos una familia de funciones, correspondientes a unos aumentos de 1500, 2000 y 2500 pesetas.



A mayor valor del incremento, los ingresos totales aumentan y el vértice de la parábola se desplaza hacia la derecha, lo que significa que se consigue el máximo para valores mayores del incremento X.

Actividad 3: Programación como automatización de procesos

Se sugiere a los alumnos la realización de programas sencillos consistentes en la secuencia de acciones: entrada de valores, realización de algún cálculo y salida de datos. Después se van introduciendo las instrucciones básicas de programación: condicionales, procesos iterativos, bucles y contadores, para la creación estructurada de programas más complejos.

Un programa es un conjunto de instrucciones que la calculadora ejecuta de forma sucesiva como si se introdujesen desde el teclado. Las instrucciones se guardan en líneas separadas por dos puntos, que señalan el principio de una instrucción. Cada programa tiene un nombre que lo identifica.

El programa que se va a construir simula el juego de adivinar un número comprendido entre el 1 y el 10. La calculadora “piensa” un número que se intenta acertar desde el teclado, después de cada nuevo intento el programa indica si el número buscado es menor o mayor que el introducido.

La secuencia de acciones para la generación del programa es la siguiente:

1. Generar un número aleatorio y guardarlo en la variable A. La instrucción *randInt* genera números aleatorios comprendidos en un intervalo especificado.
2. Con *Input* pedir un valor y almacenarlo en la variable B.
3. Comparar los valores A y B con el condicional *If* y devolver el resultado de esta comparación.
4. Ejecutar el programa mientras los valores A y B sean diferentes, de esta forma es posible introducir nuevos valores de B hasta conseguir el número buscado. Se utiliza la instrucción *While*.
5. Para que el programa resulte más claro en su ejecución se añaden frases explicativas en el inicio y final. *Disp* muestra el texto introducido.
6. Introducir un contador para saber el número de intentos realizados hasta conseguir el número exacto. El contador se concreta en la variable N, inicialmente su valor es cero y a cada nuevo intento su valor se incrementa en una unidad.

<pre>PROGRAM: JOC :ClrHome :Disp "ENDEVINA " :Disp "UN NUMERO " :Disp "DE L'1 AL 10"</pre>	<pre>PROGRAM: JOC :randInt(1,10)→A :0→B:0→N :While A≠B :N+1→N :Input B :If A<B</pre>	<pre>PROGRAM: JOC :Disp "MES PETIT " :If A>B :Disp "MES GRAN" :End :Disp "DIANA!!"</pre>	<pre>PROGRAM: JOC :Disp "AMB INTEN TS=" :Disp N : : : :_</pre>
--	---	---	--

Sólo queda ejecutar el programa, jugar y comprobar su funcionamiento. Y buena suerte!