

VECTORES: LAS FLECHAS QUE NO PARAN

Ángela Núñez Castaín

IES Alberto Pico, Santander

E-mail: anunezca@platea.pntic.mec.es

Creo que todos los conceptos matemáticos que se introducen por primera vez en la clase de Matemáticas, suponen una especial dificultad para nuestros alumnos. Simplemente la nueva palabra que corresponda a dicho concepto les suena a algo extraño, y no pocas veces produce un rechazo inicial. ¿Qué será eso?, puede ser la pregunta que se hagan.

Por esa razón, es muy importante que ese primer contacto con un nuevo concepto sea atractivo, llame la atención al alumno y les haga “poner la antena” para interesarse por el tema.

Un buen método consiste en plantear un problema que los alumnos puedan resolver con los conocimientos previos de que disponen. Pero además debe ser un problema de la vida real y de un tema próximo a ellos.

En el caso de los vectores un problema típico que puede plantearse es el del circuito de una carrera de motos. Se les presenta el recorrido de tres motos, formado por flechas unidas consecutivamente, y cada una de ellas viene determinada por la dirección de la anterior y una cierta libertad de movimientos en una cuadrícula. Es un juego en el que el alumno debe decir los errores cometidos por algunos de los pilotos que se salen de la pista o están a punto. Se puede trabajar en pequeños grupos en el aula, o dejando que lo hagan fuera de clase. En este primer contacto con el concepto de vector, los alumnos van a tener que empezar a dibujar vectores siguiendo unas reglas predeterminadas, por lo que empiezan a familiarizarse con la representación gráfica de los mismos.

El paso siguiente será presentarles la utilidad de los vectores en el estudio de algunas magnitudes del campo de la Física, como fuerzas, desplazamientos, velocidades, que no quedan definidas exclusivamente por un número.

No pretendo ahora explicar con detalle el desarrollo del tema completo, sino que me voy a detener en dos puntos en los que he visto mayor dificultad de asimilación. Las operaciones elementales, suma, resta y producto por un número, y escribir un vector como combinación lineal de otros, todo ello de forma gráfica.

Hasta ahora los recursos que he utilizado para abordar estos temas en clase, han sido las transparencias y las fotocopias.

He elaborado transparencias cuadriculadas y trianguladas, de las que hacía fotocopias para los alumnos.

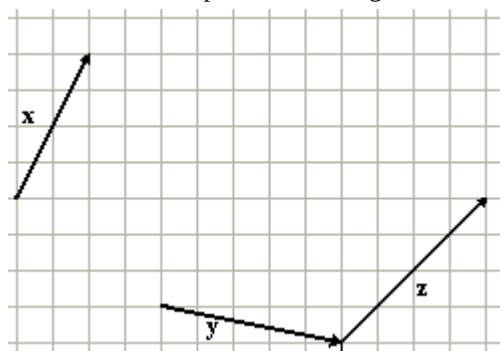
La metodología consiste en realizar las operaciones descritas en las mismas transparencias con rotuladores de colores no permanentes. Los alumnos trabajan en sus fotocopias y, según los casos, a la vez o posteriormente, se van resolviendo los ejercicios en la transparencia. A veces trabaja en el acetato el profesor y, la mayoría de las veces, los propios alumnos.

Las tramas cuadriculadas o trianguladas permiten una mayor exactitud en las representaciones gráficas de los vectores que en la pizarra, y por otra parte la visualización en el retroproyector ayuda a compartir o corregir todo el proceso y los resultados.

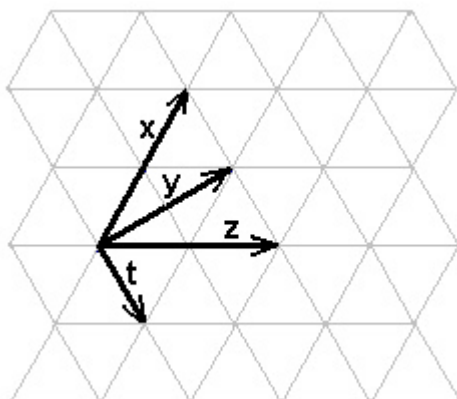
Un ejercicio típico puede ser el que se presenta en la siguiente figura, cuyo enunciado es:

Dados los vectores x , y , z de la figura obtén:

- Un vector con la misma dirección y opuesto sentido que x .
- Un vector $3x$.
- El vector $y+z$.
- Un vector $x+y$.
- Un vector $2x+3y$.
- Un vector $x-2y+z$.



O bien este otro con la trama triangular.



Representa en esta trama:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \qquad 2\mathbf{t} - \mathbf{x} \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} + 2\mathbf{y} \qquad 2\mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{z}$$

$$-\mathbf{z} - 2\mathbf{t} + 3\mathbf{y}$$

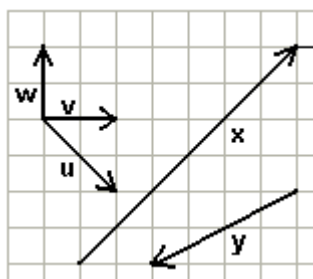
Hasta aquí no nos encontramos con demasiados problemas para que el alumno realice los ejercicios propuestos.

Pero cuando nos lanzamos a expresar un vector como combinación lineal de otros, y esta operación la tienen que realizar gráficamente con los vectores dados en un dibujo, las dificultades empiezan a surgir. Así, ejercicios como el que expongo a continuación merecen una especial atención, y el

realizarlos en las cuadrículas o triangulaciones y en transparencias y fotocopias, es fundamental.

Expresa el vector $\mathbf{x}$ como combinación lineal de:

- a) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$
 b) Expresa $\mathbf{x}$ como combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.
 c) Repite los apartados a) y b) con el vector $\mathbf{y}$.



Y al resolverlo hay que saber obtener, por ejemplo, esta figura:

Y aquí radica la dificultad, en obtener el paralelogramo que nos haga deducir que $\mathbf{y} = -2\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$

Esta figura, sin tener una cuadrícula, y sin visualizar directamente el procedimiento, es muy difícil de conseguir y de entender. La fotocopia en la mesa del alumno, y la transparencia en la pantalla son dos herramientas que ayudan extraordinariamente a conseguir un aprendizaje significativo.

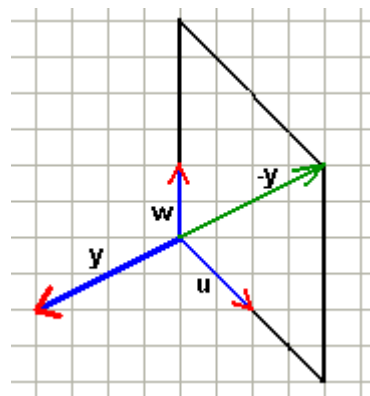
Pero cuando ya parece que se van salvando las dificultades y los alumnos encuentran las soluciones de los ejercicios propuestos con suficiente soltura, incluso cuando nos encontramos con los mismos alumnos en el curso

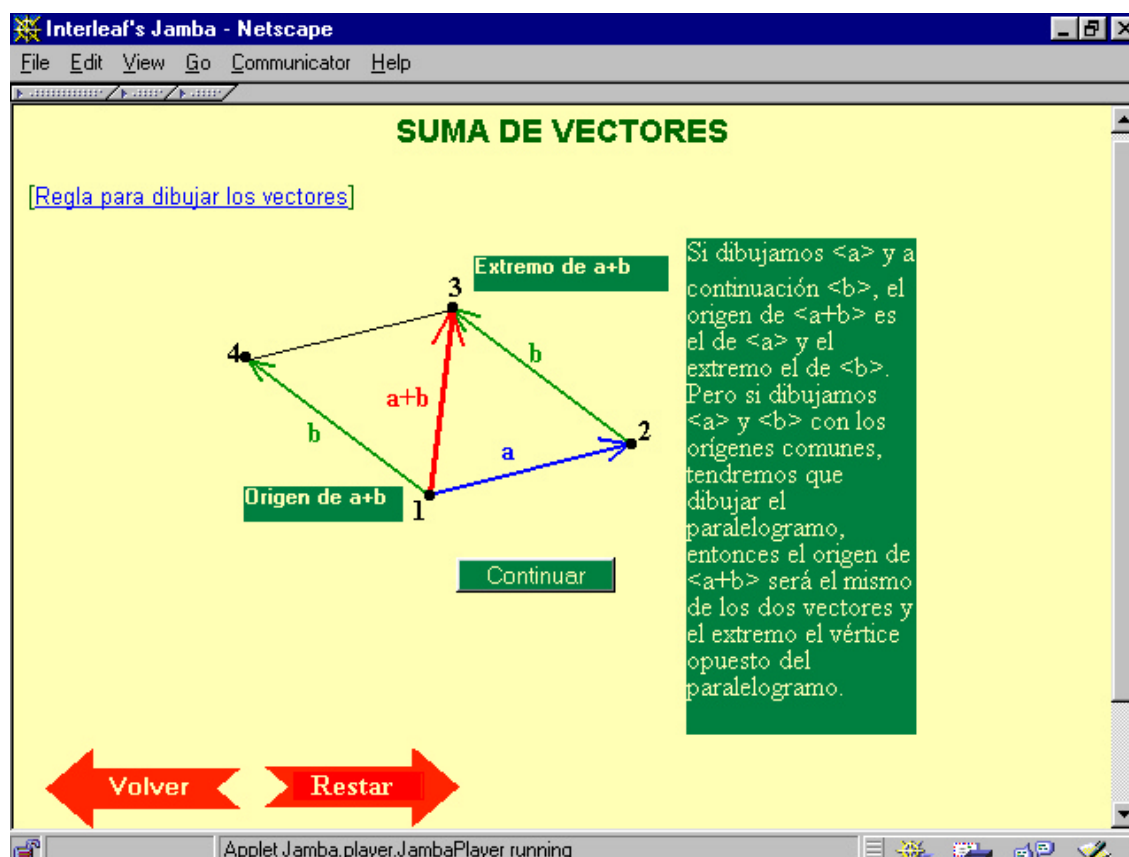
siguiente, vemos un nuevo problema. Dados dos vectores libres, al formar un paralelogramo con los mismos, saber distinguir qué diagonal representa la suma y cuál la diferencia, y sobre todo, qué sentido tienen los vectores que forman las diagonales, éste es otro escollo a salvar. Si se ha introducido la suma de vectores dibujando los sumandos uno a continuación del otro, no lo identifican con el caso de dibujar los sumandos con los orígenes comunes. ¡Ahí se lían!

Para intentar mejorar la asimilación de este concepto he elaborado unas páginas web con applets de Java, en las que el alumno puede intervenir. Ahora dibujando los vectores directamente en la pantalla del ordenador.

He elegido la herramienta de Internet por varios motivos. En primer lugar porque creo que, en un futuro no muy lejano, será el medio de comunicación más usual y asequible a toda la sociedad. En segundo lugar, porque el alumno, cada vez más, se encuentra atraído por la “pantalla”, se mueve con soltura ante ella, y puede ser un método de hacer que las Matemáticas le sean más cercanas. Y en tercer lugar porque es una forma de que otros profesores y alumnos puedan usar la herramienta con gran facilidad.

Como muestra expongo aquí una de las pantallas de la que he llamado “Unidad Didáctica Vectores”



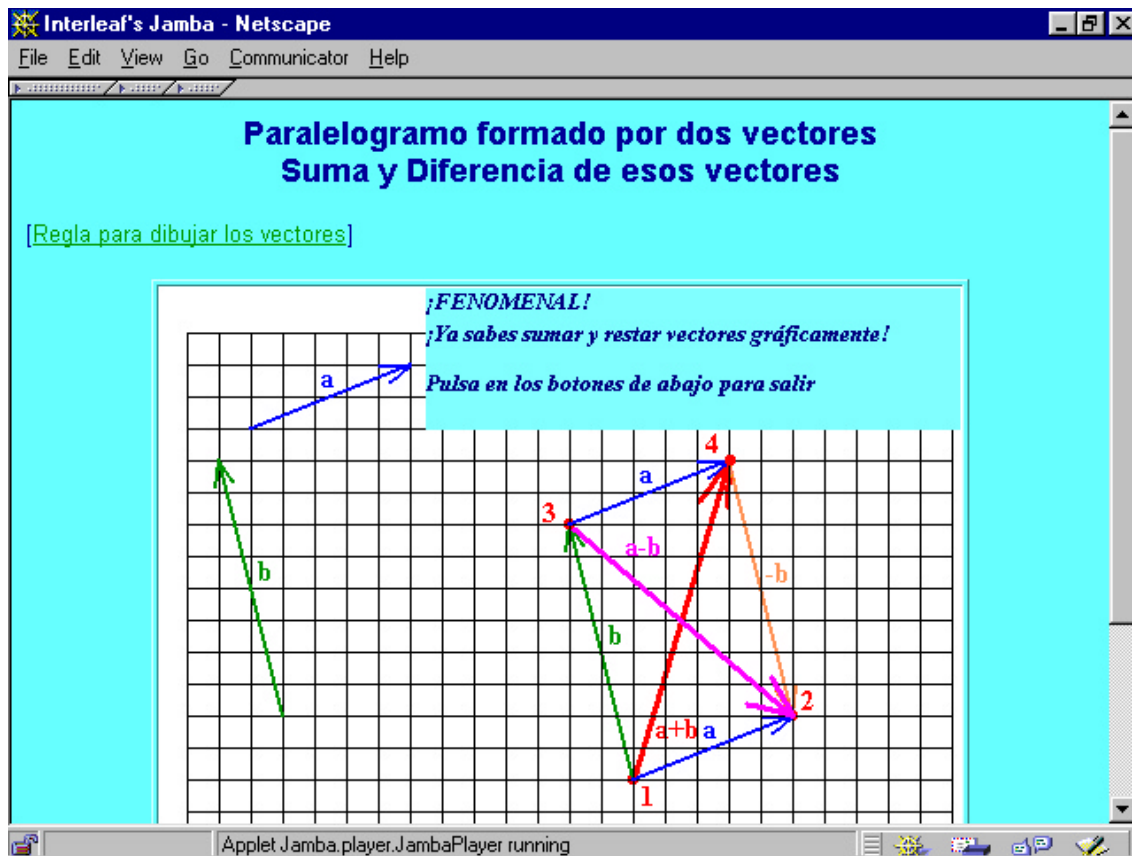


En la figura se muestra el estado final de un proceso en el que el alumno ha tenido que ir trazando los vectores y su suma con el ratón. En la parte derecha se le va dando instrucciones de los pasos a dar. Esta interacción y los efectos producidos no se puede apreciar en el papel, hay que verlos en la pantalla del ordenador y seguir los diferentes pasos de todo el proceso.

La página de índice contienen cuatro items:

1. Introducción: concepto de vector, suma y producto por un número. Ejercicio.
2. Suma de vectores. Ejercicio.
3. Diferencia de vectores. Ejercicio.
4. Paralelogramo formado por dos vectores: ejercicio resumen de la suma y diferencia de vectores.

A continuación se muestra la pantalla final del último ejercicio:



Estas páginas se pueden encontrar en la siguiente dirección:
<http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/UnidDidVectores/Index/index.htm>