

TRABAJAR LAS FUNCIONES CON EL CBR

Tomás Queralt Llopis

Julio Rodrigo Martínez

1.- INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente taller es proporcionar a los profesores una visión del trabajo que se puede desarrollar con una nueva herramienta que, por su potencia y sencillez de manejo, facilita el tratamiento de determinados contenidos de matemáticas y de la física. Sin perder de vista los contenidos del área matemáticas que debemos desarrollar en clase, pensamos que en nuestra tarea de ayudar al alumno en su proceso de maduración, el utilizar las nuevas tecnologías de las calculadoras gráficas y del CBR permite tener una visión de las matemáticas mucho menos descriptiva de lo que tradicionalmente se ha tenido, en favor de una visión más constructiva. Por esta razón, su utilización traslada la atención del trabajo en el proceso de investigación y descubrimiento, con lo cual la actitud del alumno debe ser mucho más activa que la de un mero receptor de información.

2.- ¿QUÉ ES EL CBR?

El Sistema CBRTM (Calculator-Based RangerTM) es un detector sónico de movimiento para su utilización con TI-82, TI-83, TI-85/CBL, TI-86, TI-89 y TI-92, que aporta al aula la posibilidad de capturar y analizar datos reales.



3.-¿QUÉ HACE EL CBR?

Con el CBR y una calculadora gráfica TI, los estudiantes pueden capturar, ver y analizar datos de movimiento sin tomar medidas ni hacer dibujos a mano que pueden resultar tediosos.

El CBR permite a los estudiantes explorar las relaciones matemáticas y científicas existentes entre distancia, velocidad, aceleración y tiempo utilizando los datos de las actividades llevadas a cabo. Los estudiantes pueden explorar conceptos matemáticos y científicos tales como:

- Movimiento: distancia, velocidad, aceleración.
- Representación gráfica: ejes de coordenadas, pendiente, cortes con los ejes.
- Funciones: lineal, cuadrática, exponencial, sinusoidal.
- Análisis matemático: derivadas, integrales.
- Análisis estadísticos y de datos: métodos de captura de datos, análisis estadísticos.

4.- ¿POR QUÉ PUEDEN MEJORAR MIS CLASES USANDO EL CBR?

El sistema del CBR es fácil de utilizar y de integrar en las clases de manera sencilla. De cara al estudiante, mejora la calidad de la clase, pues los alumnos aprecian que al trabajar con datos reales y no con valores que están en los libros de texto, su trabajo tiene un sentido, y que los conceptos tratados en la clase están conectados con el mundo real, y no se trata únicamente de ideas abstractas. El estudiante deberá participar activamente tanto en la captura de datos como en el análisis de su representación gráfica, así como en la exploración de las observaciones. La posibilidad de visualización permite a los estudiantes asociar rápidamente los datos de lista representados con las propiedades físicas y las funciones matemáticas que describen los datos.

Exploración gráfica. A partir de las gráficas de distancia, velocidad y aceleración con respecto al tiempo generadas automáticamente, determinadas preguntas ayudan a comprender conceptos abstractos, como ¿cuál es el significado físico de la ordenada en el origen? ¿y el del corte con el eje X? ¿y el de la pendiente? ¿y el del máximo? ¿y el del mínimo?

Exploración numérica. Se pueden emplear métodos estadísticos para explorar los datos numéricos, que una vez se sale del programa RANGER quedan almacenados en las listas en la posición REALTIME=NO.

Conexión entre el mundo físico y las matemáticas. A partir de los datos capturados por RANGER, aparecen unas gráficas que permite a los estudiantes reconocer, analizar y discutir la forma de la gráfica tanto en términos físicos como matemáticos.

Veamos dos ejemplos de utilización:

5.- ACTIVIDAD 1. APROXIMACIÓN A UNA GRÁFICA.

Objetivos.- Relacionar desde el punto de vista físico las magnitudes de espacio y tiempo. Ajuste lineal de una nube de puntos, buscando la ecuación de la recta.

Material.- La unidad de CBR. Calculadora gráfica TI con el programa RANGER instalado.

Realización.- Se deben seguir los siguientes pasos:

Captura de datos

- 1.- Sujetando el CBR con una mano y la calculadora en la otra, se apunta con el sensor hacia una pared.
- 2.- Se ejecuta el programa RANGER, y en el menú MAIN MENU se selecciona APPLICATIONS. Se selecciona METERS.
- 3.- En el menú APPLICATIONS selecciona DISTANCE MATCH. Pulsa $\subseteq$ y estudia un poco la gráfica que vas a reproducir. Responde a las preguntas 1 y 2.
- 4.- Colócate donde pienses que comienza la gráfica y pulsa $\subseteq$ para empezar la captura de datos. Desplázate de manera que los datos se aproximen a la gráfica.
- 5.- Tras el experimento, examina si tu desplazamiento se ajusta a la gráfica y contesta a la pregunta 3.
- 6.- Pulsa $\subseteq$ para mostrar en la pantalla el menú OPTIONS y selecciona SAME MATCH. Intenta mejorar la técnica al caminar y contesta a las preguntas 4, 5 y 6.

Análisis matemático

- 7.- Pulsa $\subseteq$ y salte del programa eligiendo la opción QUIT. Vamos a trabajar con las listas L_1 (tiempo) y L_2 (espacio). De acuerdo con los valores máximos, ajusta el WINDOWS de tu calculadora, y elige uno de los PLOTS para dibujar la nube de puntos.
- 8.- Con el editor de funciones, busca para cada tramo de la gráfica, la ecuación de la recta que mejor se ajusta. Guarda cada expresión en una función distinta.
- 9.- Define la función a trozos cuya gráfica es la que tienes en la pantalla.

Exploraciones

- 10.- Pulsa $\subseteq$ y en el menú OPTIONS selecciona NEW MATCH. Estudia el primer segmento y contesta a las preguntas 7 y 8.
- 11.- Estudia toda la gráfica y contesta a las preguntas 9 y 10.
- 12.- Colócate donde piensas que comienza la gráfica y pulsa $\subseteq$, intentando reproducir la gráfica. Contesta a las preguntas 11 y 12.
- 13.- Pulsa $\subseteq$ y en el menú OPTIONS selecciona NEW MATCH. Estudia la gráfica y contesta a las preguntas 13, 14 y 15.
- 14.- En el MAIN MENU selecciona QUIT para salir del programa RANGER.

Actividad 1. Preguntas para el alumnado.

Captura de datos

- 1.- ¿Qué propiedad física se representa en los ejes X e Y? _____ ¿En qué unidades? _____
_____ ¿Cuál es la distancia entre las marcas? _____
- 2.- ¿A qué distancia de la pared deberíamos situarnos con el CBR? _____

- 3.- ¿Nos situamos demasiado cerca, demasiado lejos o a la distancia adecuada? ____
- 4.- ¿Deberíamos caminar hacia delante o hacia atrás para un segmento de pendiente positiva? ____
¿Por qué? _____
- 5.- ¿Deberíamos caminar hacia delante o hacia atrás para un segmento de pendiente negativa? ____
¿Por qué? _____
- 6.- ¿Qué se debe hacer para un segmento de pendiente nula? _____
¿Por qué? _____

Exploraciones

- 7.- Si das un paso cada segundo, ¿qué longitud deberían tener los pasos? _____
- 8.- Si en vez de ello, das pasos de 1 metro de longitud, ¿cuántos pasos debes dar? _____
- 9.- ¿Para qué segmento te deberás mover más rápidamente? _____
¿Por qué? _____
- 10.- ¿Para qué segmento te deberás mover más lentamente? _____
¿Por qué? _____
- 11.- Además de elegir si tienes que moverte hacia delante o hacia atrás, ¿qué otros factores hay que considerar para reproducir exactamente la gráfica? _____
- 12.- ¿Qué propiedad física representan las pendientes de los segmentos? _____
- 13.- Para el primer segmento, ¿cuántos metros debes caminar y en cuantos segundos? _____
- 14.- Convierte el valor de la pregunta 13 (la velocidad) en metros/segundo: _____
Conviértelo en metros/minuto: _____
Conviértelo en metros/hora: _____
Conviértelo en kilómetros/hora: _____
- 15.- ¿Qué distancia recorriste realmente? _____

6.- ACTIVIDAD 2: ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE UN MUELLE

Objetivos.- El estudio de los movimientos periódicos, aprovechando para ello las posibilidades que nos brinda el movimiento de un muelle.

Material:

- 1 CBR
- 1 calculadora gráfica ti82/83
- un muelle

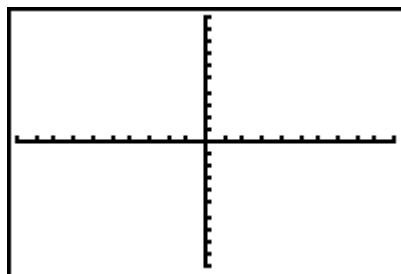
Instrucciones:

1. Coloca el CBR en el suelo con el sensor hacia arriba.
2. Arranca el programa RANGER en tu calculadora.
3. Entra las instrucciones siguientes:
4. En el **MAIN MENU** selecciona **1: SETUP SAMPLE** para acceder al menú setup.
5. Pulsa $\square$ sobre **REALTIME** para que aparezca **no**.
6. Pulsa $\downarrow$ (flecha abajo) para seleccionar la siguiente línea TIME (S) y pulsa $\square$ para cambiar el tiempo a 10 segundos.
7. Pulsa $\downarrow$ para seleccionar las siguientes líneas. Colocaremos el DISPLAY en la opción distancia, **BEGIN ON** en la opción **ENTER**, **SMOOTHING**: en la opción **NONE**, y **UNITS** en **METERS**.
8. Pulsa $\rightarrow$ moviendo el cursor hasta el comando **START NOW**.
9. Sube a una silla y comienza a mover el muelle en dirección al CBR, sujetándolo de un extremo, y sin aproximarse a más de 50 cm. Procura darle un pequeño impulso cada vez para que haga siempre el mismo movimiento

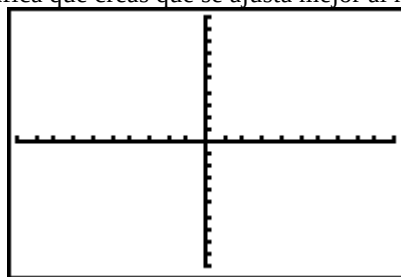
10. Antes de pasar al paso 12 debes trabajar las actividades 1 y 2.
11. Pulsa $\subseteq$ y sigue las direcciones de la pantalla de la calculadora.
12. Pulsa $\subseteq$ y selecciona 7: **QUIT** para salir del programa **RANGER**.

Cuestiones:

Actividad 1: Dibuja la gráfica distancia/tiempo, que describe el extremo del muelle al moverse, donde la distancia representa la distancia del extremo del muelle al CBR. ¿Puede tomar esa gráfica valores negativos? Dibuja aquí abajo la gráfica que tú crees que mejor se ajusta al movimiento.



Actividad 2: Después de la discusión de los diferentes modelos de gráficas que han dibujado tus compañeros, vuelve a dibujar la gráfica que creas que se ajusta mejor al modelo.



Actividad 3: Compara el modelo de gráfica que ha aparecido en la calculadora con los modelos anteriores. Estudia sus diferencias.

Actividad 4: El tipo de función que estamos estudiando es una función sinoidal de la forma:

$$Y = a + b \cdot \text{sen}(cx), \text{ a, b, c, reales}$$

Dando valores a “a”, “b”, y “c”, intenta buscar un valor que se ajuste a la función. Guarda el modelo obtenido en Y1.

Actividad 5: Realiza un ajuste automático con una función sinoidal de la distancia y el tiempo, para obtener con la calculadora la función que se ajusta a nuestro experimento. Almacénala en Y2.

Actividad 6: Utilizando los Plots de Estadística y el editor de funciones, compara los datos del experimento y las funciones Y1 e Y2.

Actividad 7: Estudia el periodo, máximos y mínimos de la función Y2.

Actividad 8: Si realizamos de nuevo el experimento, pero ahora dejamos que el muelle se vaya poco a poco parando (no le damos un pequeño impulso), ¿cómo será la gráfica que aparecerá en la gráfica de la calculadora?. Si tomamos los máximos de esta última gráfica, ¿cómo es la función que representa los máximos en función del tiempo?.

7. PARA ACABAR

Cualquier tipo de función o fenómeno físico que este relacionado con el movimiento se puede estudiar con el CBR, veamos una relación de algunos experimentos que se pueden realizar:

TIPO DE ESTUDIO	TIPO DE EXPERIMENTO
Estudio del movimiento uniforme.:	Movimiento de un coche de juguete Alumno a alumna caminando
Estudio movimiento uniformemente acelerado o retardado:	Caída libre de un objeto. Lanzar un coche por una rampa hacia arriba y hacia abajo
Movimientos periódicos:	Muelles y péndulos
Determinación de g	Estudio de la aceleración de un móvil al bajar por un plano con diferentes inclinaciones
¿Se conserva la energía?	Estudio de la E_c y E_p de un móvil que baja libremente por una rampa