

TRABAJANDO EL TEOREMA DE PITÁGORAS CON LOGO

Guido Ramellini

Además de querer reforzar y profundizar en el aprendizaje de los contenidos matemáticos, así como de los de informática, nos importa subrayar como trabajos de este tipo evidencian las diferencias que existen en la forma de trabajar del ordenador y la del ser humano. Esto comporta tener que modificar el modo de pensar cuando queremos que la máquina ejecute nuestras órdenes. De hecho, nos parece que un importante, sino el principal, aspecto formativo que puede desarrollar el trabajo con ordenador en esta etapa escolar es obligar a buscar estrategias y contenidos alternativos.

PRERREQUISITOS: conocimiento de algunos contenidos del programa de geometría: clasificación de triángulos, teorema de Pitágoras, ángulos internos y externos, coordenadas de puntos en el plano cartesiano, etc. Todos o algunos de estos contenidos se pueden desarrollar a través de las actividades que Emma Castelnuovo propone en sus libros¹, como: construir triángulos a partir de los lados (**FIG 1**); construir triángulos isósceles de igual base (**FIG 2**); dibujar triángulos rectángulos con los cuadrados de los lados; verificar a través del peso el teorema de Pitágoras; etc...

ACTIVIDAD CON EL ORDENADOR

El objetivo de la actividad con el ordenador será intentar trabajar los mismos contenidos utilizando Logo, un lenguaje que escogimos por fácil de desarrollar ya en las últimas clases de primaria, capaz de crecer con las habilidades de los alumnos y prepararlos a lenguajes más complejos. Intentaremos construir procedimientos que, a partir de las medidas de los lados:

- digan si un determinado triángulo existe,
 - dibujen triángulos rectángulos particulares;
 - dibujen un triángulo genérico;
 - y lo clasifiquen.
- a) Es la operación más fácil, y sólo es preciso introducir la medida del lado mayor antes de las de los otros dos.

TO TRI :A :B :C

IF :A<:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]

IF :A=:B+:C [PRINT [ESTE TRIANGULO ES IMPOSIBLE] STOP]

END

- b) Podemos pedir a los chicos que construyan procedimientos para evidenciar el teorema de Pitágoras con un dibujo, o sea un triángulo rectángulo con los cuadrados de los lados. Una vez decidido utilizar ternas pitagóricas para los lados, pronto se darán cuenta que lo difícil es saber las medidas de los ángulos agudos para dibujar los cuadrados. Podemos ayudarles sugiriendo que dibujen un triángulo rectángulo isósceles, con la hipotenusa de base: de este triángulo conocemos los catetos (hipotenusa/raíz 2) y los ángulos (45, 45, 90):

TO QUA :L

REPEAT 4[FD :L LT 90]

END

PU FD :IPO RT 135 PD

QUA :CAT PU FD :CAT RT 90 PD

QUA :CAT HT

END

TO TRI.ISO :IPO

MAKE "CAT :IPO/SQRT 2

LT 90 QUA :IPO

(FIG 3)

Si queremos triángulos rectángulos no isósceles, sin recurrir a la trigonometría, necesitamos trabajar en el plano cartesiano, para utilizar las coordenadas como referencias, de modo que la figura empiece del origen y se pueda utilizar la primitiva TOWARDS, que nos indica el ángulo con el que debemos girar la tortuga para dirigirla a un determinado punto.

Esta vez el triángulo tiene por base un cateto.

TO QUA :L

REPEAT 4[FD :L LT 90]

END

PU FD :B

MAKE "ANG TOWARDS [0 0]

TO TRI.RET :A :B

LT 90 QUA :A

PU FD :A RT 90 PD QUA :B

¹ Emma Castelnuovo, *Numeri e Figure*, La Nuova Italia, 1989 1ª Edizione.

Emma Castelnuovo, *Figure e Lettere*, La Nuova Italia, 1989 1ª Edizione

```
MAKE "C SQRT(:A*:A+:B*:B)
RT :ANG PD QUA :C HT
END
```

(FIG 4)

c) Si queremos generalizar todavía más el procedimiento, para dibujar un triángulo no necesariamente rectángulo ¿cómo se pueden traducir para el ordenador las normales instrucciones: “desde los extremos de la base a , con radio b y luego c , traza dos arcos que determinarán el tercer vértice del triángulo?” Es fácil hacer que la tortuga de Logo vaya a los extremos de la base y que trace los dos arcos de radio b y c que se cortarán en el tercer vértice, pero ¿cómo hacer para que la tortuga reconozca este punto?

(FIG 5)

```
TO CIRCULO :XC :RADIO
LOCAL "AMT
MAKE "AMT :RADIO*3.14159/180
PU SETX :XC
SETX XCOR--:RADIO SETH 0 PD
REPEAT 181 [FD :AMT RT 1]
PU SETX :XC PD
END
```

```
TO CONSTR :A :B :C
CS HOME RT 90 FD :A
MAKE "XC 0 MAKE "RADIO :B
CIRCULO :XC :RADIO
MAKE "XC :A MAKE "RADIO :C
CIRCULO :XC :RADIO
HT
END
```

En nuestro trabajo sobre el papel, una vez encontrado el tercer vértice, podíamos trazar los lados del triángulo sin más. Pero, para que el ordenador cumpla la misma operación, necesita saber dónde cae el punto. En la figura ya hemos introducido el elemento que nos puede ayudar a definir la posición de todos los puntos del plano, o sea, las coordenadas. En este modo, haciendo coincidir un extremo de la base con el origen de los ejes ($0\ 0$), las coordenadas del otro extremo serán ($a\ 0$).

Más difícil será que los alumnos puedan encontrar las coordenadas del tercer vértice, sin poseer unos cuantos elementos de álgebra y geometría analítica, así que no nos quedaría otra opción que sugerirles qué fórmula utilizar en el procedimiento, sin explicarles cómo se obtiene.

```
TO TRI
MAKE "X (:A*:A+:B*:B-:C*:C)/(2*:A)
MAKE "Y SQRT (:B*:B-:X*:X)
SAETXY :X :Y HOME
PRINT :X PRINT :Y
END
```

NB: El procedimiento TRI se debe colocar en el procedimiento COSTRI antes de END.

Si queremos que los alumnos entiendan todo el desarrollo del procedimiento, podemos intentar encontrar un modo más fácil para solucionar el problema.

Imaginemos que hacemos rodar el triángulo y lo colocamos con el cateto menor como base, haciendo que un extremo coincida con el origen de los ejes.

Su otro extremo, P, tendría como coordenadas ($b\ 0$).

Si el triángulo es rectángulo, ¿cómo será el cateto c respecto a la base b ?

O sea, ¿dónde estará situado el tercer vértice, Q ?

¿Qué pasará en el caso de que el triángulo sea acutángulo? ¿Y obtusángulo?

Será fácil descubrir que si el triángulo es rectángulo, el punto Q pertenece al eje y , y por tanto su abscisa será: $x_Q = 0$.

Si el triángulo fuera acutángulo, el tercer vértice pertenecería al I cuadrante, con $x_Q > 0$; y si por el contrario fuera obtusángulo, resultaría $x_Q < 0$.

Todavía queda el problema de encontrar el valor de x_Q .

Aplicando las fórmulas para determinar la longitud de los segmentos en el plano cartesiano, obtendremos:

$$c^2 = x_Q^2 + y_Q^2 \quad \text{e} \quad a^2 = (x_Q - b)^2 + y_Q^2$$

de donde se obtiene:

$$c^2 - a^2 = x_Q^2 - 2x_Qb + b^2 + y_Q^2 - x_Q^2 - y_Q^2$$

o sea:

$$c^2 - a^2 = -2x_Qb + b^2$$

y por lo tanto:

$$x_Q = (a^2 + b^2 - c^2) / 2b$$

Ahora, si el triángulo es rectángulo, entonces: $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ y $x_Q = 0$.

Si el triángulo es acutángulo, entonces: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ y $x_Q > 0$.

Si el triángulo es obtusángulo, entonces: $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ y $x_Q < 0$,

que es exactamente lo que teníamos que demostrar.

Creemos que hay más de un alumno que podrá seguir este desarrollo

(FIG 6)

Traducir estas consideraciones en Logo no es difícil; en todo caso, presentamos aquí un procedimiento simple que, para dibujar un triángulo de medidas óptimas, requiere que el usuario utilice para las variables valores comprendidos entre 50 y 300 pasos de tortuga.

TO TRI :A :B :C	para dibujar un triángulo de lados a , b y c
if :a=:c+:b [print [TRIANGULO IMPOSIBLE] stop]	condiciones para que
IF :A>:C+:B [PRINT [TRIANGULO IMPOSIBLE] STOP]	el triángulo exista
MAKE "X (:B*:B+:C*:C-:A*:A)/(2*:B)	$xQ = (a^2 + b^2 - c^2) / 2b$
MAKE "Y SQRT (:C*:C-X*:X)	$yQ = c^2 - xQ^2$
if :x=0 [print [EL TRIANGULO ES RECTANGULO]]	
if :x<0 [print [EL TRIANGULO ES OBTUSANGULO]]	
if :x>0 [print [EL TRIANGULO ES ACUTANGULO]]	
PU SETXY -100 0 PD RT 90	instrucciones para dibujar
REPEAT 50 [FD 10 PU FD 10 PD]	el eje de las abscisas
PU HOME PD REPEAT 25 [FD 10 PU FD 10 PD]	instrucciones para dibujar la
PU HOME PD	rama + del eje de las ordenadas
SETXY :X :Y	traza el lado a
SETXY :B 0	traza el lado c
HOME HT	traza la base y esconde la tortuga
END	

CONCLUSIONES

El trabajo presentado, que no pretende substituir las actividades de laboratorio matemático basadas en dibujar o construir con materiales tan simples como eficaces (cartón, elásticos, cordel, etc.), parece satisfacer los objetivos que nos habíamos fijado:

- i) permite la profundización de los contenidos matemáticos;
- ii) mantiene una metodología constructiva, y no sólo para los contenidos geométricos;
- iii) profundiza en el aprendizaje del lenguaje informático y de unas habilidades lógicas;
- iv) evidencia las diferentes formas en que trabaja la mente cuando debe comunicar con humanos y cuando debe dibujar procedimientos para el ordenador.

Es difícil comprobar la eficacia formativa de este tipo de actividad: una valoración directa, a través de un test que se limitaría a comprobar habilidades aplicadas o imitativas, nos parece limitada y poco interesante.

Si y cuánto haya sido eficaz un trabajo de este tipo se podrá saber cuando esos alumnos, en los próximos años, habrán de resolver una situación problemática y utilizarán un desarrollo de este tipo.

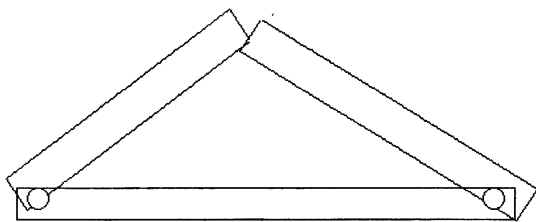


FIGURA 1

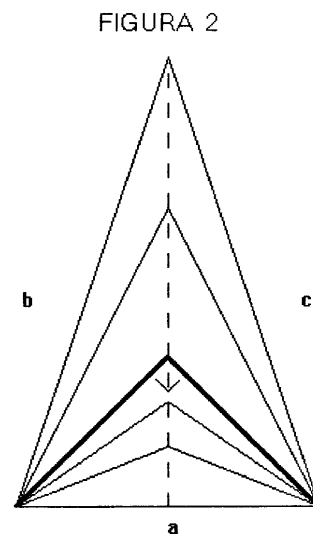


FIGURA 2

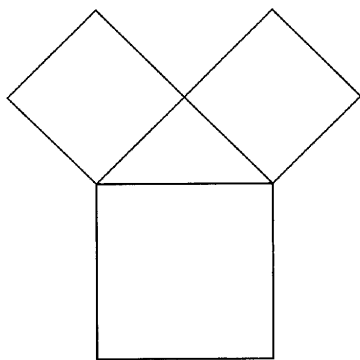


FIGURA 3

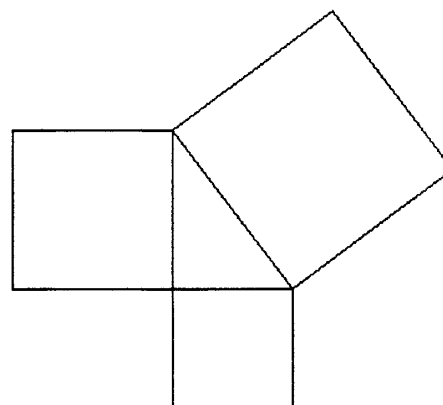


FIGURA 4

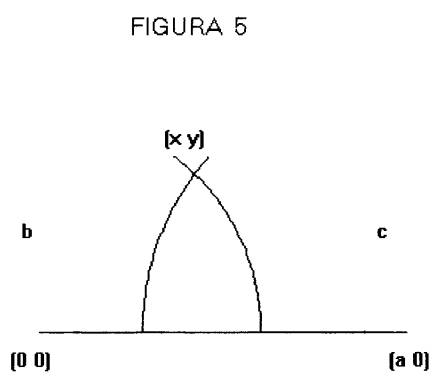


FIGURA 5

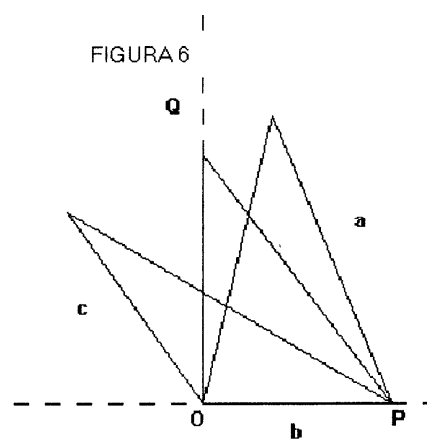


FIGURA 6