

LOS PROBLEMAS DE APOLONIO CON CABRI II

Bartolomé Sintés Marco

Los problemas de Apolonio

Los llamados problemas de Apolonio consisten en la construcción de circunferencias que cumplan tres de las siguientes condiciones: que pasen por unos puntos determinados (condiciones P), que sean tangentes a unas rectas determinadas (condiciones R), o que sean tangentes a unas circunferencias determinadas (condiciones C). Combinando estas condiciones, hay en total diez problemas de Apolonio diferentes que se pueden llamar de forma abreviada: PPP, PPR, PPC, PRR, PRC, PCC, RRR, RRRC, RCC y CCC. Por ejemplo, el problema PPR sería el problema de hallar las circunferencias tangentes a una recta y que pasen por dos puntos dados.

Estos problemas son interesantes desde dos puntos de vista. Por una parte, pueden servir de eje vertebrador de un curso de geometría, puesto que algunos de estos problemas tienen soluciones sencillas, mientras que otros necesitan abordarse recurriendo a técnicas sofisticadas (ejes radicales, homotecias, inversiones, etc). Por otro lado, pueden servir de eje vertebrador de un curso de Cabri, puesto que requieren las funciones más avanzadas del programa.

Macroconstrucciones en Cabri II

Una de las características más sobresalientes del programa de geometría dinámica Cabri II es la posibilidad de ampliación que ofrece a través de las macroconstrucciones (macros). En general, una construcción geométrica es una secuencia de pasos con la que a partir de unos objetos iniciales (puntos, rectas, etc.) se obtienen unos objetos finales (por ejemplo, a partir de tres puntos se puede obtener el incentro del triángulo formado por los tres puntos). Al almacenar la construcción como macro ya no es necesario repetir todos los pasos de la construcción, sino que Cabri nos da directamente el resultado.

Para que una construcción geométrica pueda almacenarse como macro es necesario que esté bien definida, es decir, que los objetos finales se construyan exclusivamente a partir de los objetos iniciales. Este hecho debe tenerse en cuenta al realizar las construcciones, como se comenta en la nota 1.

Sin embargo, a menudo los problemas de construcción no admiten una solución válida para todas las situaciones. Generalmente una construcción es válida para casi todas las situaciones menos en un número limitado de casos particulares.

Una solución poco elegante sería definir varias macros en función de las condiciones iniciales, pero entonces tendríamos que tener en cuenta continuamente cuál debemos gastar. Si además queremos hacer macros que a su vez utilicen otras macros el número de posibles situaciones crece geométricamente.

Lo ideal es construir una macro que tenga en cuenta la posición de los objetos iniciales y en función de ello lleve a cabo una construcción u otra.

Para ello recurriremos a un artificio llamado macros lógicas. Las macros lógicas son macros como las demás, pero se denominan macros lógicas a las macros cuya única misión es construir un objeto si se cumplen unas determinadas condiciones. En la nota 2 se comenta una macro lógica sencilla.

El problema PPR y las macros lógicas

Además de los casos PPP y RRR que no plantean ninguna dificultad, el resto de problemas de Apolonio son reducibles a dos de ellos: el problema PPR y el PPC. Por ser el más sencillo de los dos, estudiaremos aquí el problema PPR. Este problema presenta tres casos particulares:

- Los puntos se encuentran situados a lados diferentes de la recta. El problema no tiene solución.
- Los puntos se encuentran situados del mismo lado de la recta y a la misma distancia de la recta. El problema tiene una solución, que se describe en la nota 3.
- Los puntos se encuentran situados del mismo lado de la recta a diferentes distancias de la recta.

El problema tiene dos soluciones, que se describen en la nota 3.

Para crear una macro que nos dibuje directamente el problema PPR, tendremos que tener en cuenta las dos últimas situaciones (la primera no hace falta considerarla ya que las otras dos construcciones no dan ningún resultado si los puntos se encuentran a lados distintos de la recta).

Necesitamos por tanto dos macros. Los objetos iniciales de ambas serán la recta R y los puntos A y B. Los objetos finales serán dos puntos A' y B' sobre A y B, respectivamente. La primera macro creará los puntos A' y B' si y sólo si A y B se encuentran a la misma distancia de R (macro que llamaremos AB//R). La segunda creará los puntos A' y B' si y sólo si A y B se encuentran a diferente distancia de R (macro que llamaremos ABXR). En la nota 4 se describen las macros.

Una vez creadas las macros, podemos resolver el problema PPR de forma general. Empezaremos situando los puntos en una de las dos posiciones, por ejemplo, a la misma distancia de R. Aplicamos la macro AB//R y resolvemos el problema a partir de los puntos A' y B' que ha creado la macro. A continuación situamos los puntos A y B en la otra posición, es decir, a diferente distancia de R. Al desplazar los puntos, la construcción anterior desaparecerá. Aplicamos la macro ABXR y resolvemos el problema a partir de los puntos A' y B' que ha creado la macro. De esta manera, la construcción es completa. Dependiendo de la posición de los puntos, sólo una de las macros conducirá a la solución.

Para almacenar esta construcción como macro, debemos situar los puntos A y B en una de las dos posiciones, marcarlos como objetos iniciales, marcar los objetos finales, situar los puntos A y B en la otra posición y marcar los objetos finales.

Utilización en clase

Los problemas de Apolonio son demasiado difíciles para abordar directamente por alumnos de Secundaria o Bachillerato, pero pueden adaptarse para crear material de trabajo. Algunas actividades posibles son:

- Se les puede proporcionar a los alumnos hojas de instrucciones del estilo de la nota 3, con más o menos información según su nivel. Se puede aumentar la dificultad eliminando los nombres de los objetos en los dibujos o reduciendo las explicaciones de cada ilustración.
- Los alumnos pueden buscar en qué posiciones las construcciones no funcionan y por qué.
- Se pueden trabajar partes de un problema desde el punto de vista algebraico.

Bibliografía

- Gonzalo Sánchez Vázquez. Métodos gráficos de resolución de problemas geométricos. SAEM "Thales" Sevilla. Páginas.103 a 107.
- <http://www.cabri.net/abracadabri/GeoPlane/Puissance/CTgt1D2pts.html> y siguientes

Para esta ponencia he utilizado estas dos fuentes. El libro de Sánchez Vázquez es muy bueno, aunque algo oscuro en algunos detalles. Las páginas de Abracadabri son fundamentales para cualquier usuario de Cabri.

Nota 1

Imaginemos que queremos definir la siguiente macroconstrucción: A partir de dos circunferencias (A ; p) (circunferencia de centro A y radio p) y (B ; q), la macro debe dibujar la circunferencia (A ; p+q)

Construcción 1: Dibujamos un punto M sobre la circunferencia (A ; p) y a continuación la circunferencia (M ; q). Se traza la semirrecta AM y llamamos N a la segunda intersección de AM con la circunferencia (M ; q). La circunferencia buscada es la circunferencia (A ; AN).

Esta construcción es correcta, pero no es conveniente para definir una macro ya que emplea el punto M que no está unívocamente definido a partir de las dos circunferencias y sus centros. Es preferible la siguiente construcción, en la que el punto M está definido sin ambigüedad:

Construcción 2: Dibujamos la recta AB. A continuación dibujamos la recta perpendicular a AB que pasa por A. Llamamos M a una de las intersecciones de la recta perpendicular con la circunferencia (A ; p). A partir de aquí seguimos los pasos de la construcción 1.

Esta construcción permite definir la macro. Señalemos que aunque la recta perpendicular corta en dos puntos a la circunferencia y nosotros hemos cogido uno cualquiera de ellos, para Cabri ese punto está definido inequívocamente ya que tiene en cuenta la orientación de la figura.

Nota 2

Imaginemos que queremos definir una macro que, dado un punto A y una circunferencia (B ; p) nos dibuje un punto sobre A, si A se encuentra fuera de B o sobre B. La construcción sería la siguiente.

Dibujamos el segmento AB. Llamamos M a la intersección de AB con la circunferencia. Llamamos C al simétrico de A con respecto de M. Llamamos N al simétrico de C respecto de A. N es el punto buscado.

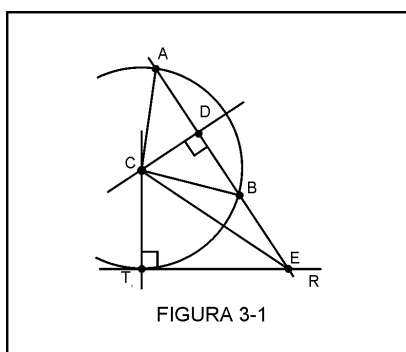
Dado que M solamente existe si A se encuentra fuera de B, si A se encuentra dentro de B, M no se dibujará y N tampoco.

Nota 3

Problema PPR con los puntos A y B a la misma distancia de la recta R

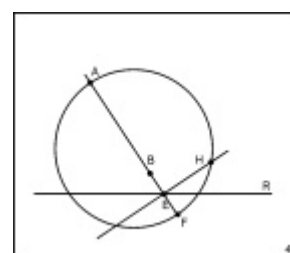
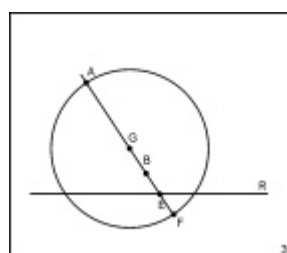
Este caso es sencillo. Basta con dibujar la mediatriz de AB y su intersección T con la recta R. Se dibuja la mediatriz de AT o de BT y su intersección con la mediatriz de AB es el centro de la circunferencia buscada.

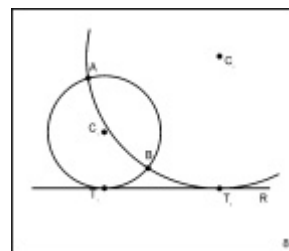
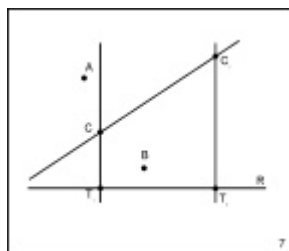
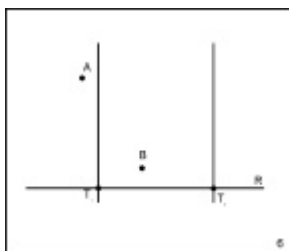
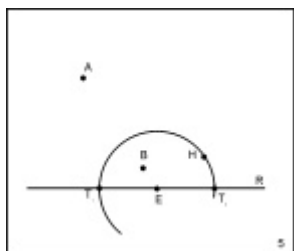
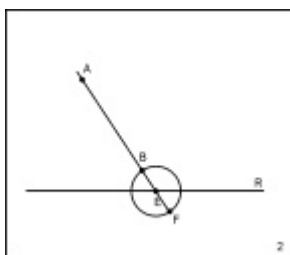
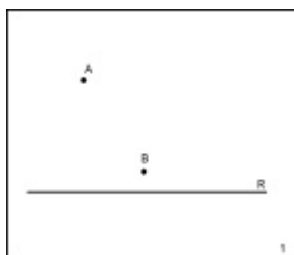
Problema PPR con los puntos A y B a diferente distancia de la recta R



Este caso es más complicado. La figura 3-1 muestra la idea en que se basa la solución. En esta figura, D es el punto medio de AB, E es la intersección de AB con R, C_1 es el centro de la circunferencia buscada, T el punto de tangencia de la circunferencia con R y C_1D es la mediatriz de AB. Puesto que los triángulos rectángulos EC_1T y C_1DE comparten la hipotenusa, podemos escribir que $r^2 + ET^2 = ED^2 + cp^2$ (1). Como $cp = r^2 - BD^2$, la ecuación (1) queda $ET^2 = DE^2 - BD^2 = (DE + BD)(DE - BD) = EA \cdot EB$. Por tanto ET es la media geométrica de EA y EB. Eso nos da el camino para resolver el problema. Obtenemos la media geométrica de EA y EB, Dibujamos la circunferencia de centro E y radio la media geométrica, su intersección con R nos da los puntos T_1 y T_2 . Trazamos las perpendiculares a R por T_1 y T_2 . Sus intersecciones con la mediatriz de AB nos dan los centros de las circunferencias buscadas.

Las ilustraciones siguientes muestran la construcción completa. En los pasos 2-3 y 4 se obtiene la media geométrica de EA y EB.





Nota 4

Macro ABXR

A partir de una recta y dos puntos A y B, esta macro crea dos puntos A' y B' sobre A y B, respectivamente, si A y B se encuentran a diferente distancia de R. La construcción es sencilla. Se traza la recta AB y se marca la intersección I de esta recta con R. Se dibuja el simétrico de A con respecto a I y el simétrico de este nuevo punto con respecto a I. Este último punto dibujado coincide con A y es el punto A' buscado. Se dibuja el simétrico de B con respecto a I y el simétrico de este nuevo punto con respecto a I. Este último punto dibujado coincide con B y es el punto B' buscado. Esta construcción no producirá ningún resultado si A y B se encuentran a la misma distancia de R, ya que el punto I no existiría.

Macro A//B

A partir de una recta R y dos puntos A y B, esta macro crea dos puntos A' y B' sobre A y B, respectivamente, si A y B se encuentran a la misma distancia de R. La construcción es un poco más complicada. Se traza la recta AB. Se dibuja el simétrico P de A con respecto a la recta R. Se dibuja el simétrico Q de P con respecto a la recta AB. Se dibuja el punto medio S de PQ. Se dibuja el segmento PS. Se dibuja la recta R2, la recta paralela a R que pasa por A. La intersección de la recta R2 con el segmento PS es el punto A'. A' sólo existe cuando A y B está a la misma distancia de R. La misma construcción a partir de B nos daría el punto B'. Esta construcción no producirá ningún resultado si A y B se encuentran a diferente distancia de R, ya que la recta y el segmento no se cortarían.