

Los Sistemas de Computación Matemática
como recurso didáctico de apoyo para la
presentación del concepto de derivada.
Versión CDROM.

Juan Antonio Velasco Mate
Lorenzo Martín García

1 Introducción.

Con el paso del tiempo, los Sistemas de Cálculo Simbólico han ido mejorando su potencia de cálculo y han ido cambiando su aspecto de tal modo que no solamente han conseguido que el usuario pueda obtener de ellos un razonable rendimiento sin malgastar mucho esfuerzo, sino que, además, el resultado final tenga un aspecto lo suficientemente agradable para poder ser compartido por otras personas. Así, surge otra posible aplicación de estos paquetes de software: la ayuda, como soporte, para la realización de presentaciones.

Ahora no es difícil encontrar retroproyectores en las aulas, fomentándose de esta manera la utilización de transparencias - método de exposición sistemáticamente utilizado en muchos Centros Universitarios -. Con más frecuencia van apareciendo salas equipadas con cañones de proyección - fijos o portátiles - que permiten proyectar sobre una pantalla grande las acciones realizadas por un ordenador.

En esta línea, un paquete de software con capacidad para la realización de cálculos simbólicos y con un entorno agradable, puede utilizarse para 'liberar' al profesor de matemáticas de rellenar la pizarra de operaciones repetitivas o de gráficas regularmente ajustadas, y tal vez permita al alumno, una vez 'liberado' del cálculo tedioso, concentrarse en la esencia de los conceptos que se exponen.

Presentamos a continuación un ejemplo de cómo podría explicarse el concepto de derivada de una función real de variable real utilizando el Sistema de Computación Matemática MapleV.

2 Funciones utilizadas.

Teniendo como entradas la función $f(x)$, el punto $x_0 = a$, el punto $x_1 = h$ y el nombre de la variable que queramos considerar, la función `resta2puntos(f, a, h, x)` proporciona la expresión, dependiendo de la variable x , de la recta que pasa por los puntos $P = (a, f(a))$ y $Q = (h, f(h))$.

```
> resta2puntos:=(f,a,h,x)->solve((y-f(a))/(f(h)-f(a))=(x-a)/(h-a),y):
> resta2puntos(f,a,h,x);
```

$$\frac{-f(a)h - xf(h) + xf(a) + af(h)}{-h + a}$$

Teniendo como entradas la función $f(x)$, el punto $x_0 = a$ y el nombre de la variable que queramos considerar, la función `rectatangente(f, a, x)` proporciona la expresión, dependiendo de la variable x , de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x_0 = a$.

```
> rectatangente:=(f,a,x)-> D(f)(a)*(x-a)+f(a):
> rectatangente(f,a,x);
```

$$D(f)(a)(x - a) + f(a)$$

Teniendo como entradas la función $f(x)$ y el punto $x_0 = a$, las funciones

$$\textit{derivadaderecha}(f, a) \text{ y } \textit{derivadaderecha}(f, a)$$

realizan una representación gráfica conjunta de la función $f(x)$, de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x_0 = a$ y de los segmentos que corresponden con el numerador y el denominador del cociente incremental que da origen a la definición de derivada lateral tanto por la derecha como por la izquierda respectivamente, de la función $f(x)$ en el punto $x_0 = a$. Permitiendo, además, realizar una animación que ilustra cómo las prolongaciones de las hipotenusas de los triángulos rectángulos formados por los segmentos que surgen del cociente incremental se 'aproximan' a la recta tangente.

```
> derivadaderecha:=(f,a)->plots[display]( [seq( plot( [ f(x),
> [t,f(a),t=a..a+(16-i)/15],
```

```

> [a+(16-i)/15,t,t=f(a)..recta2puntos(f,a,a+(16-i)/15,a+(16-i)/15)],
> f(a) ] , x=a-1..a+1,
> color=[green,brown,blue,red,brown,yellow],
> thickness=[3,2,3,2,2,1] ),i=1..15)], axes=framed, insequence=true):
> derivadaizquierda:=(f,a)->plots[display]([seq(plot([ f(x),
> [t,f(a),t=a-(16-i)/15..a],
> rectatangente(f,a,x), recta2puntos(f,a,a-(16-i)/15,x),
> [a-(16-i)/15,t,t=f(a)..recta2puntos(f,a,a-(16-i)/15,a-(16-i)/15)],
> f(a) ] ,x=a-1..a+1,
> color=[green,brown,blue,red,brown,yellow],
> thickness=[3,2,3,2,2,1]),i=1..15)], axes=framed, insequence=true):

```

3 Desarrollo de la sesión.

El objetivo de la sesión es ilustrar el concepto de derivada en un punto de una función real de variable real, asociándolo con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto considerado. Asimismo, se pretende relacionar la no existencia de derivada de una función en un punto - o de recta tangente - con la "suavidad" de la gráfica de la función en dicho punto.

Para ello, se utilizarán las funciones definidas en el apartado anterior intentando aprovechar las posibilidades gráficas y de cálculo del sistema. Implícitamente, se estará utilizando el siguiente código de colores: la línea verde representa la gráfica de la función, la línea azul representa la recta tangente a la función en el punto elegido, las líneas marrones representan el numerador y denominador del cociente incremental y el color rojo se utilizará para representar las líneas que se 'aproximan' a la recta tangente a la gráfica de la función en el punto elegido.

3.1 Funciones derivables.

Recordando que, dada la función real de variable real $f: R \rightarrow R$, la derivada de la función f en el punto $x_0 = a$ se define como

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y que si se consideran los límites laterales se originan las derivadas laterales, el caso más sencillo e ilustrativo a analizar es el de una función del tipo

$$f(x) = ax + b$$

en donde la gráfica de la función y de la recta tangente coinciden porque el cociente incremental permanece constante para cualquier variación de la variable x y vale exactamente el coeficiente del término en x .

```

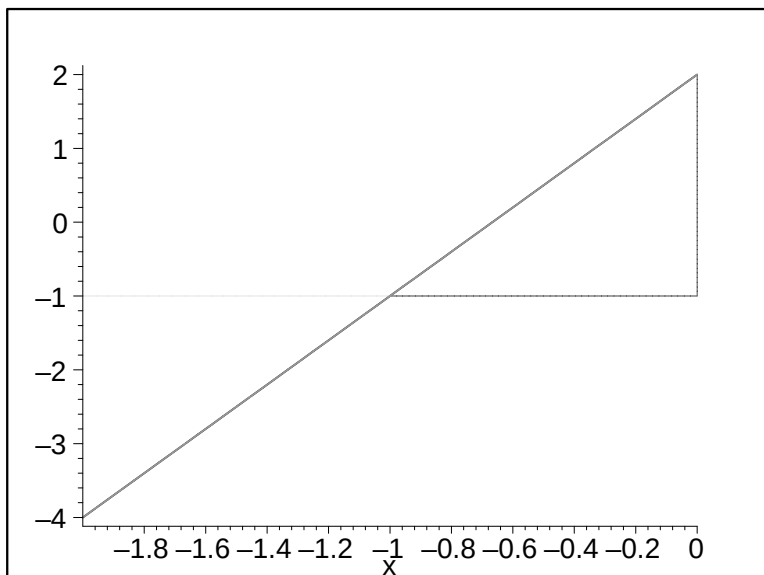
> f:=x->a*x+b;
> '(f(x)-f(a))/(x-a)'=simplify((f(x)-f(a))/(x-a));
f := x -> a x + b

```

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a$$

del ángulo que forma la recta tangente con el eje OX coincide con la derivada de la función en cualquier punto que consideremos.

```
> derivadaderecha(x->3*x+2, -1);
```



El mismo procedimiento puede repetirse para otra función frecuentemente manejada por los alumnos, por ejemplo para la función cuadrática $f(x) = x^2 + 2x + 1$. En este caso, el cociente incremental no es constante, depende del punto donde nos encontremos y del incremento que se considere.

```
> f:=x->x^2+2*x+1;
```

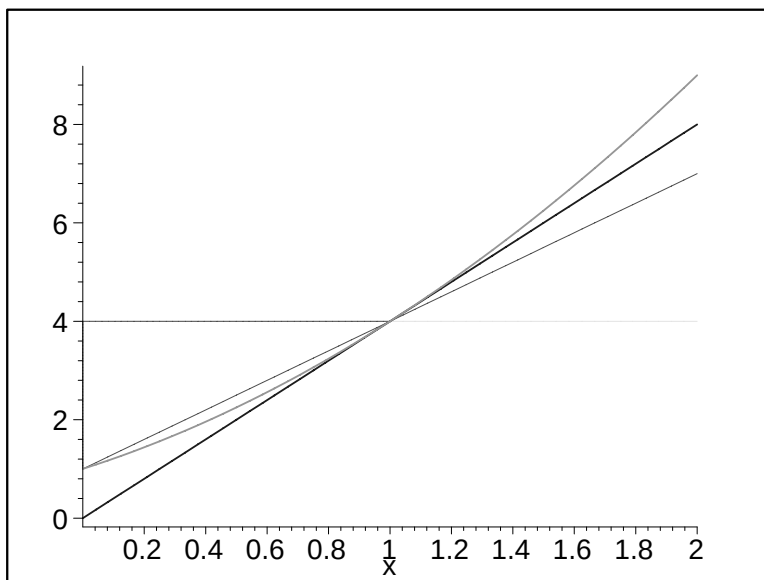
```
> '(f(x)-f(a))/(x-a)'=simplify((f(x)-f(a))/(x-a));
```

$$f := x \rightarrow x^2 + 2x + 1$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + 2 + a$$

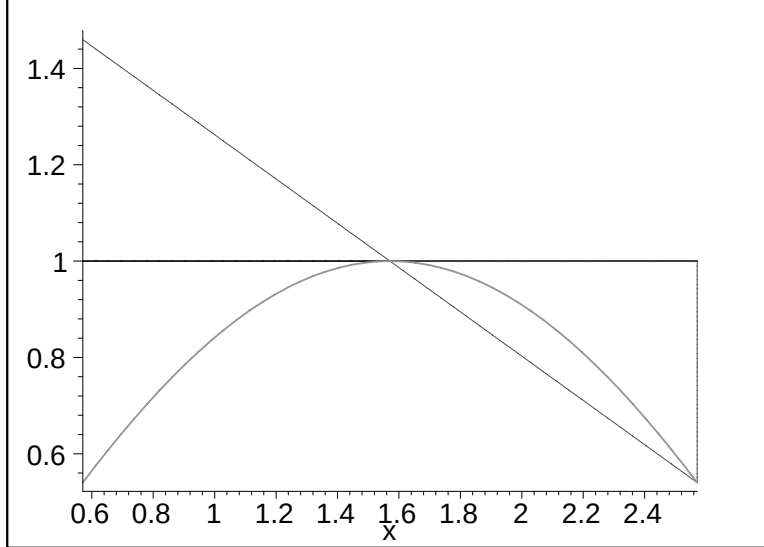
Gráficamente, considerando el punto $a = 1$, se tiene

```
> derivadaizquierda(f,1);
```

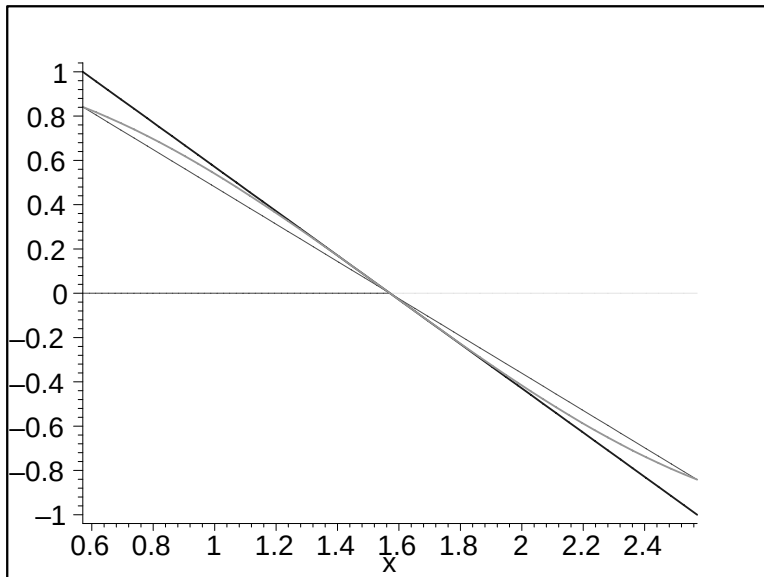


Lo mismo puede repetirse para las funciones trigonométricas, como $f(x) = \sin(x)$ en puntos críticos.

```
> derivadaderecha(sin,Pi/2);
```



```
> derivadaizquierda(cos,Pi/2);
```



3.2 Funciones no derivables.

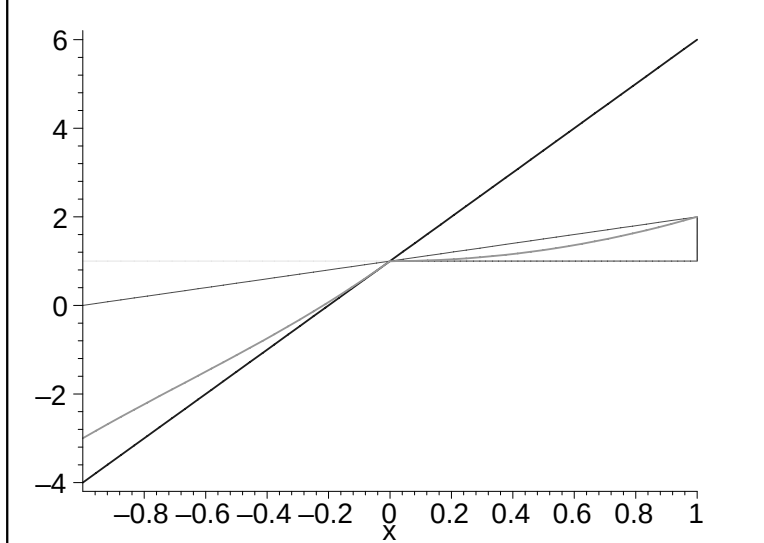
Desde un punto de vista intuitivo, las derivadas laterales sirven para ilustrar el porqué no es suficiente la continuidad de una función en un punto para que exista la derivada de esa función en ese punto. En la siguiente función polinómica a trozos y continua, puede comprobarse que, en punto $a = 0$, aunque existen las derivadas laterales y las consiguientes 'rectas tangentes laterales', no hay coincidencia de ambas.

```
> f:=x->piecewise(x<=0,x^3+2*x^2+5*x+1,1+x^2);
```

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x \leq 0, x^3 + 2x^2 + 5x + 1, 1 + x^2)$$

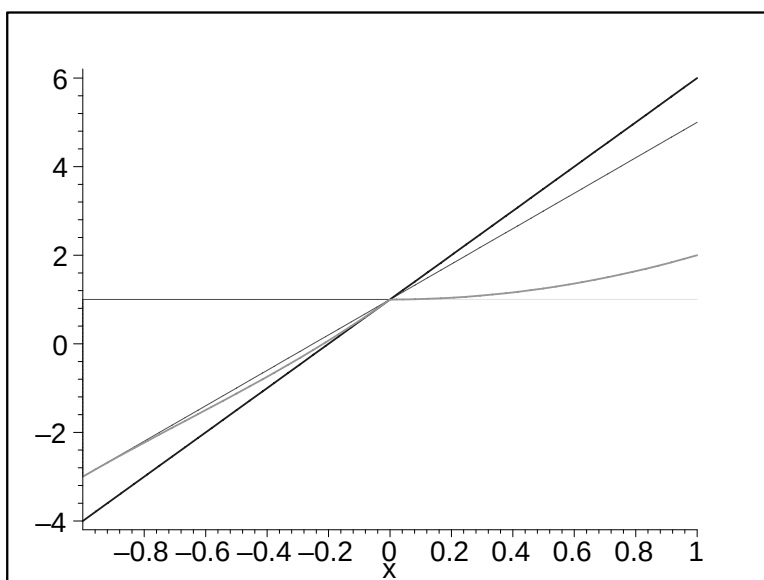
La animación representa cómo al aproximarnos al punto $a = 0$ por la derecha, las rectas se aproximan a una recta paralela al eje de las abscisas

```
> derivadaderecha(f,0);
```



Mientras que al aproximarnos al punto $a = 0$ por la izquierda, las rectas resultantes NO se aproximan a ninguna recta paralela al eje de las abscisas

```
> derivadaizquierda(f,0);
```



Numéricamente puede comprobarse que el límite del cociente incremental no existe, porque los límites laterales no coinciden, esto es, la función $f(x)$ no es derivable en el punto $a = 0$.

```
> Limit('(f(x)-f(0))/(x-0)',x=0,left)= limit((f(x)-f(0))/(x-0),x=0,left);
> Limit('(f(x)-f(0))/(x-0)',x=0,right)= limit((f(x)-f(0))/(x-0),x=0,right);
> Limit('(f(x)-f(0))/(x-0)',x=0)= limit((f(x)-f(0))/(x-0),x=0);
```

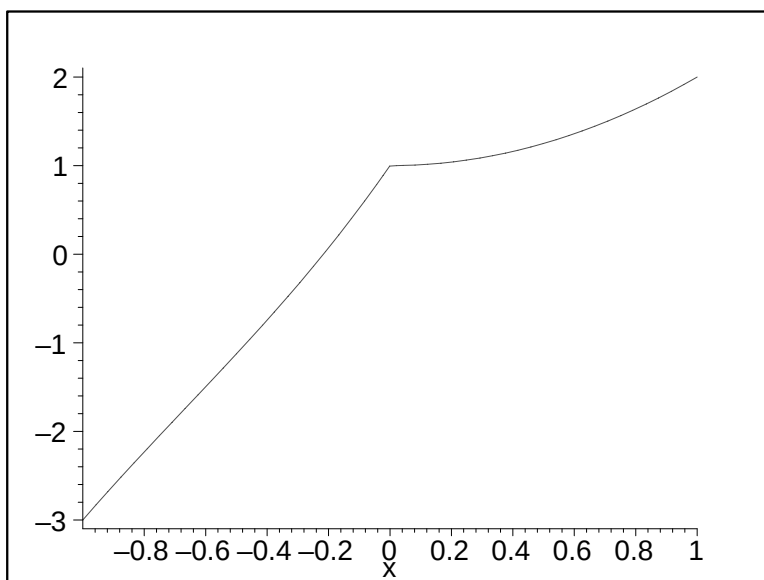
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \text{undefined}$$

de la observación de su gráfica. Es inmediato darse cuenta de que la función presenta un pico en el punto $P = (0, 1)$, no se trata de una función 'suave'. En este vértice no es sencillo encontrar una recta tangente puesto que cualquier recta que pase por ese punto podría entenderse como tal.

```
> plot(f(x), x=-1..1, axes=framed);
```

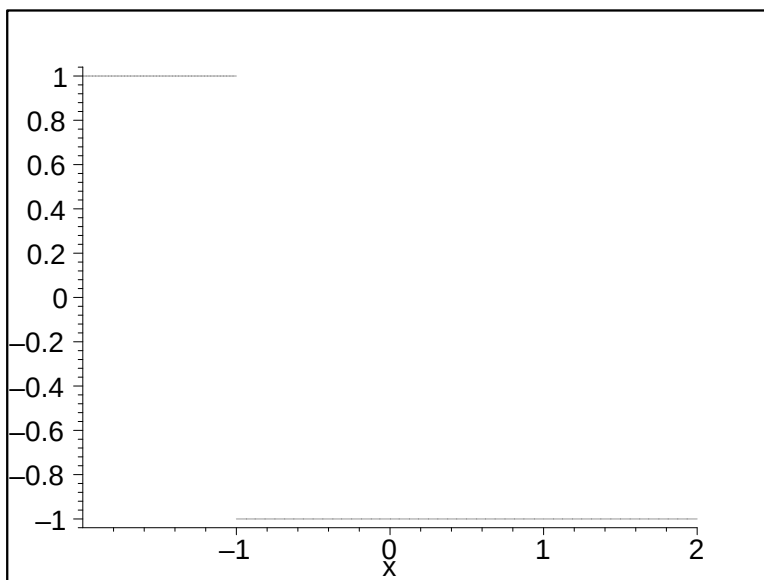


Vistos estos ejemplos, parece claro deducir que si una función no es continua en un punto, difícilmente podemos hablar de recta tangente a la gráfica o de derivada de esa función en el punto donde falla la continuidad.

```
> f:=piecewise(x<-1,1,-1);
```

```
> plot(f,x=-2..2, axes=framed, discont=true);
```

$$f := \begin{cases} 1 & x < -1 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Otra situación aleccionadora se produce cuando las derivadas laterales de una función en un punto no existen y consecuentemente no pueden coincidir. La siguiente función,

```
> f:=x->x*sin(1/x);
```

$$f := x \rightarrow x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

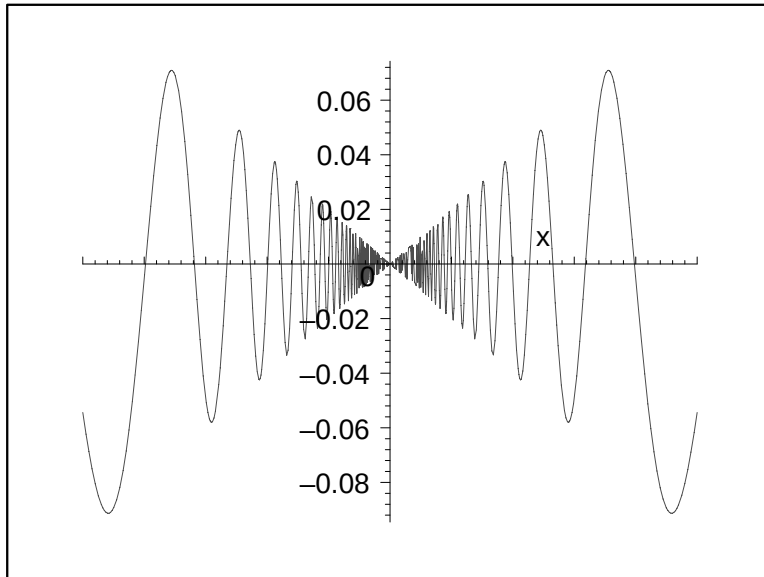
límite cuando x tiende a a .

```
> Limit(f(x),x=0)=limit(f(x),x=0);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Completando la definición de la función $f(x)$ añadiendo $f(0) = 0$ nos encontramos con una función continua, pero muy difícil de representar con detalle cerca del punto conflictivo debido al gran número de oscilaciones que origina.

```
> plot(f(x), x=-1/10..1/10, numpoints=200);
```



En cualquier punto x_0 diferente del $a = 0$, la función anterior es derivable y su derivada vale

```
> D(f)(x[0]);
```

$$\sin\left(\frac{1}{x_0}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x_0}\right)}{x_0}$$

Sin embargo, la función no es derivable en el punto $a = 0$ porque no existe ninguno de los límites laterales del cociente incremental

```
> Limit('(f(x)-f(0))/(x-0)',x=0, left)=limit(f(x)/x, x=0, left);
```

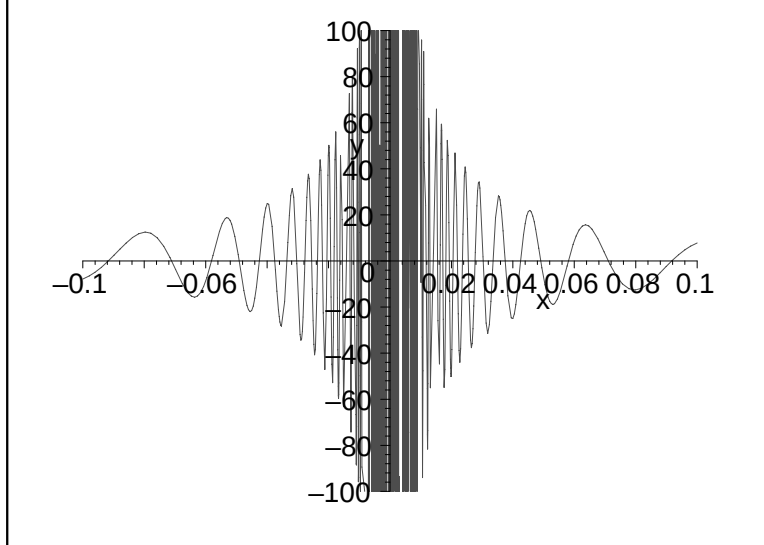
```
> '(f(x)-0)/(x-0)'=f(x)/x;
```

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1..1$$

$$\frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Por otra parte, la representación gráfica de la función derivada tampoco es muy manejable, aunque podemos afirmar que no es una función continua porque no existe el límite cuando x tiende a 0.

```
> plot(D(f)(x), x=-.1..0.1, y= -100..100, numpoints=100);
```

```
> Limit(D(f)(x), x=0, left)=limit(D(f)(x), x=0, left);
```

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \text{undefined}$$

4 Conclusiones

Un Sistema de Computación Matemática que como Maple V está dotado de un interface agradable puede ser utilizado para la realización de presentaciones en el aula con las mismas ventajas que puedan ofrecer los paquetes de software especializados en el diseño de presentaciones y transparencias.

Además permite la interacción y modificación de los contenidos y de los resultados en el desarrollo de la exposición. De esta manera, el orador transmite al oyente una mayor sensación de credibilidad porque las situaciones que se manejan pueden ser cambiadas con muy poco esfuerzo.

El número de ejemplos presentados aumenta considerablemente respecto a una sesión tradicional porque se libera al ponente de muchos cálculos farragosos y poco ilustrativos. Curiosamente, los alumnos suelen creer más fervientemente los resultados obtenidos por un ordenador que los deducidos por el profesor en la pizarra.

5 Bibliografía

1. *Cálculo: Teoría, Problemas y Sistemas de Computación Matemática*. Amillo, Ballesteros, Guadalupe, Martín. McGraw-Hill, Madrid, 1996.
2. *Ejercicios de Análisis Matemático*. Ballesteros, Martín. Clagsa, Madrid, 1994.