

MOTIVANDO TEMAS DE PRECALCULO CON LA CALCULADORA GRAFICA

Bruce H. Edwards

Department of Mathematics
PO Box 118105. University of Florida
be@math.ufl.edu

1 Introducción

El uso de la tecnología en la clase se ha convertido en una poderosa herramienta para un mejor entendimiento de las matemáticas. En esta conferencia presentamos otra forma en que la calculadora gráfica puede ser utilizada para despertar el interés del estudiante. Se trata de motivar al estudiante a través de una serie de ejemplos sorprendentes. En estos ejemplos, la calculadora gráfica da una respuesta, a veces correcta, a veces incorrecta, pero siempre sorprendente. Esto ofrece al profesor una base para la explicación de ciertos conceptos matemáticos fundamentales. En otras palabras, la calculadora gráfica nos ofrece la oportunidad para que el estudiante pueda descubrir por sí mismo nociones y resultados matemáticos que por métodos tradicionales únicamente pueden ser presentados al estudiante como colección de información acumulada.

2 Dominios

Considere las siguientes funciones

$$\begin{aligned}y1 &= 2 \ln x \\ y2 &= \ln x^2.\end{aligned}$$

¿Son idénticas estas dos funciones? En otras palabras, ¿son las gráficas iguales? Al trazar sus gráficas usando la calculadora gráfica, podemos observar que son funciones diferentes por tener dominios distintos. Es decir, la siguiente propiedad elemental

$$a \ln x = \ln x^a$$

es válida únicamente para valores de x mayores que 0. Las demás propiedades elementales de la función logaritmo deben ser aplicadas cuidadosamente.

Algo similar puede ser observado en la calculadora aún con funciones más elementales. Por ejemplo, invitamos al lector a comparar las siguientes funciones.

$$\begin{aligned} y1 &= \sqrt{x} \\ y2 &= \sqrt[4]{x^2} \end{aligned}$$

Nótese que el trazado de gráficas de funciones utilizando la calculadora gráfica nos conduce a analizar y a preguntarnos más profundamente acerca del concepto fundamental de dominio de funciones.

3 Funciones inversas

¿Las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \text{arcsen}(x)$ son funciones inversas? ¿Se obtiene la función identidad al efectuar la composición de estas dos funciones? Invitamos al lector a trazar las gráficas de estas dos composiciones,

$$\begin{aligned} y1 &= \text{sen}(\text{arcsen}(x)) \\ y2 &= \text{arcsen}(\text{sen}(x)). \end{aligned}$$

¿Por qué no resulta la gráfica de la función identidad en ambos casos? Estas gráficas sorprendentes nos ofrecen la oportunidad de presentar y discutir en detalle los tópicos de funciones inversas y de composición de funciones.

4 Números Complejos

Es interesante comparar las gráficas de las dos funciones

$$\begin{aligned} y1 &= \ln x \\ y2 &= |\ln x|. \end{aligned}$$

¿Por qué son distintos los dominios correspondientes? También resulta sorprendente cambiar la calculadora al formato complejo y evaluar algunas expresiones como las siguientes:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \text{arcsen}(2) = ? \\ (b) \quad & \text{sen}(\text{arcsen}(2)) = ? \\ (c) \quad & \ln(-1) = ? \\ (d) \quad & e^{\pi i} = ? \end{aligned}$$

5 Traslaciones

¿Cual es la relación entre las gráficas de las dos funciones

$$\begin{aligned} y1 &= \ln x \\ y2 &= 2 + \ln x? \end{aligned}$$

Es fácil ver que la gráfica de $y2$ es una traslación **vertical** de la gráfica de $y1$. Esto quiere decir que las funciones inversas de $y1$ y $y2$ deben ser traslaciones **horizontales**:

$$\begin{aligned} y3 &= e^x & (\text{inversa de } y1) \\ y4 &= e^{x-2} & (\text{inversa de } y2) \end{aligned}$$

Sin embargo, no es tan obvio la relación entre las gráficas de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} y3 &= e^x \\ y5 &= \frac{1}{8}e^x \end{aligned}$$

Las gráficas indican que deben ser traslaciones horizontales! Este resultado es correcto, puesto que

$$y5 = \frac{1}{8}e^x = e^{\ln(1/8)} e^x = e^{x - \ln 8}.$$

6 Derivadas

¿Cual es la derivada de $y1 = |x|$ en $x = 0$? Si se escribe

$$nDeriv(y1(x), x) \mid x = 0.000001$$

se obtendrá una respuesta también inusitada. El aparente error es justificable por el hecho de que la mayoría de las calculadoras usan el cociente simétrico para aproximar $f'(x)$,

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (1)$$

En general, los textos de cálculo definen la derivada a partir del cociente de diferencias

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2)$$

Podemos sacar provecho de la relación entre (1) y (2) para distinguir la aproximación numérica de una derivada y su definición precisa. Es decir, el concepto de derivada no es únicamente una colección de fórmulas.

7 Funciones Paramétricas

La calculadora gráfica es un instrumento muy útil para hacer gráficas en coordenadas polares y también para trazar gráficas de curvas paramétricas. Un punto que resulta muy importante es el de saber distinguir entre la gráfica de una curva, considerada como un conjunto de puntos, y las ecuaciones paramétricas como tal. Por ejemplo, considere los siguientes pares de ecuaciones paramétricas definidas sobre el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$:

$$\begin{aligned}xt1 &= \cos(t) \\ yt1 &= \sin(t)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}xt2 &= \cos(t^2) \\ yt2 &= \sin(t^2)\end{aligned}$$

¿Las gráficas de estos pares de ecuaciones paramétricas son idénticas? ¿Estas curvas paramétricas son iguales? Observe con cuidado como la calculadora hace la gráfica de la segunda curva. ¿La curva representada por el segundo par de ecuaciones es *suave* en el punto $t = 0$? Es muy útil trazar esta curva usando valores de t próximos a 0.

8 Conclusión

Los ejemplos que hemos citado nos hacen concientes de la importancia de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas. La calculadora gráfica nos ha hecho cambiar la manera de enseñar conceptos matemáticos, en una forma que puede ser mucho más instructiva y amena para el estudiante. Con la calculadora y una guía adecuada el estudiante puede asimilar y descubrir por sí mismo resultados matemáticos que por métodos tradicionales únicamente serían una colección de información. Invitamos al lector a que de forma creativa descubra ejemplos motivantes, que con la misma intención de los aquí presentados, puedan servir para una mayor comprensión de las matemáticas.