

CONSTRUÇÃO DE UM PROGRAMA EM CALCULADORAS TI QUE PRODUZ POLINÓMIOS DE 4º GRAU COM ESTREMOS E PONTOS DE INFLEXOM CUJAS COORDENADAS SOM RACIONAIS

Carlos Campoy Vázquez.
Departamento de Física.
Universidade da Corunha
campoy@udc.es

Resumo. Em ordem a facilitar ao professor umha bateria de exercícios que permitam ao aluno emprender a análise dos gráficos das funções sem apenas treinamento nas técnicas de derivação, elabora-se um programa que proporciona polinómios de 4º grau cujas derivadas se anulam para valores racionais a fim de que o aluno possa calculá-los investigando entre os divisores dos termos independentes. Asquárticas som as funções mais singelas entre as que podem apresentar-se situações como anulação simultânea das derivadas 1ª e 2ª, a da derivada segunda sem que haja inflexom ou a inexistência de raízes reais de algumha das derivadas. Som, ademais, a causa da continuidade, idóneas para iniciar ao aluno na determinação dos intervalos de crescimento e convexidade.

1. Introdução

Um polinómio de 4º grau com coeficientes inteiros ou racionais:

$$f(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \quad \text{pode-se escrever:}$$

$$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{e as derivadas 1ª e 2ª, serem:}$$

$$f'(x) = 4(x-m)(x-p)(x-q) \quad \text{(I)}$$

$$f''(x) = 12(x-v)(x-w) \quad \text{(II)}$$

derivando o 2º membro de (I) e igualando-o ao de (II) resulta umha identidade de polinómios de 2º grau, que equivale a tantas equações como resultem de igualar os seus coeficientes:

$$3(v+w) = 2(m+p+q) \quad \text{(III)}$$

$$3vw = pq + qm + mp \quad \text{(IV)}$$

De onde v e w, som as soluções da equação quadrática

$$x^2 - \frac{2}{3}(m+p+q)x + \frac{1}{3}(mp + pq + qm) = 0 \quad \text{(V)}$$

cujo discriminante é:

$$\Delta_1 = 2/9 [(m-p)^2 + (p-q)^2 + (q-m)^2] \quad \text{(VI)}$$

Obtemos as seguintes conclusões:

1º) Quando m, p e q som reais e nom as tres iguais, v e w som reais e diferentes. Para obter valores racionais devemos dar valores racionais arbitrários em (III) e (IV) a m, p e v, obtendo-se: $[ponho k = (m+p)/2]$:

$$q = v + \frac{(v-m)(v-p)}{2(v-k)} \quad w = k - \frac{(m-p)^2}{12(v-k)} \quad \text{(VII)}$$

que som válidas para os seguintes casos:

CASO 1

Escolhem-se

m racional arbitrário

p racional, cumprindo $m \neq p$

v racional, cumprindo $m \neq p$, $v \neq k$, $v \neq k \pm (m-p)/6$ [se nom, seria: $q=w=p$ (ou $q=w=m$)]

entom (VII) fornecem q e w. Os coeficientes do polinómio, som:

$A = 6(v-k)$	$C = 36(v-k)vw$
$B = -12(v-k)(v+w)$	$D = -24 mpq(v-k)$

Os cinco valores serão diferentes, pelo que a quártica terá:

Tres extremos de abcissas m, p, q

Duas inflexões *obliquas* de abcissas v, w

CASO 2 Escolhem-se os racionais m, p, v cumprindo $v \neq k$, mas incumprindo alguma das outras condições exigidas no caso anterior, por exemplo $m=p$. As mesmas fórmulas que no caso anterior proporcionam-nos os valores de q e w e os coeficientes do polinómio.

A quártica terá:

Um extremo de abcissa q

Umha inflexão *recta* de abcissa w ($= m = p$)

Umha inflexão *oblíqua* de abcissa v

2º) Quando $m = p = q$ necessariamente será $m = p = q = v = w$. Asigna-se um valor racional arbitrário a m e nom é necessário calcular outros pontos. Os coeficientes virão dados pelas mesmas fórmulas que se utilizarão no caso 4. (Para $k = q$ e $z = 0$)

CASO 3 Escolhe-se m racional arbitrário

A quártica terá um único extremo de abcissa m que podemos dizer que é *recto* por ser ali a curvatura nula. O gráfico será simétrico.

3º) Quando m e p som complexos conjugados

então q deve ser real. O discriminante Δ_1 pode escrever-se:

$$m, p = k \pm i\sqrt{z}$$

$$\Delta_1 = \frac{4}{9}[(k-q)^2 - 3z] \quad \text{para} \quad z > \frac{(k-q)^2}{3} \quad \text{conjugados:}$$

também v e w serão complexos

CASO 4 Escolhem-se

q racional arbitrário

k racional cumprindo $k \neq q$

z racional cumprindo a desigualdade expressada arriba.

Os coeficientes do polinómio serão

$A = 3$	$B = -4(2k+q)$	$C = 6(k^2+2kq+z)$	$D = -12q(k^2+z)$
---------	----------------	--------------------	-------------------

A quártica terá um único extremo *curvo* de abcissa q, mas o gráfico nom será simétrico pois haverá um ponto de abcissa $(2k+q)/3$ onde se anulará a derivada terceira.

CASO 5 Escolhem-se

q racional arbitrário (neste caso k nom se elege, pois $k = q$)

z racional positivo

Os coeficientes obtêm-se com as mesmas fórmulas que no caso 4.

A quártica terá unicamente um extremo *curvo* de abcissa q, e o gráfico será simétrico.

4º) Quedam por ver os casos para os que v e w som reais, sendo complexos m e p. Porém agora adoptaremos m e p como incógnitas e v, w e q como dados, pelo que partiremos da equação (consequência de III e IV) :

$$x^2 + (q-3S)x + (q^2-3Sq+3vw) = 0 \quad \text{cujo discriminante é} \quad \Delta_2 = 3[T^2 - (q-\Sigma)^2]$$

Sendo

$$S = (v+w)/2$$

$$T = |v-w|$$

Então, se $q < S - T$ ou $q > S + T$, elegendo v e w reais, serão m e p complexos conjugados.

CASO 6 Escolhem-se

v racional arbitrário

w racional cumprindo $w \neq v$

q racional cumprindo alguma das condições recém expressadas.

As fórmulas dos coeficientes som:

$A = 1$	$B = -2(v+w)$	$C = 6vw$	$D = -4q^3 - 3Bq^2 - 2Cq$
---------	---------------	-----------	---------------------------

A quártica terá:

Um extremo de abcissa q

Dous pontos de inflexom *oblíquos* de abcissas v e w.

CASO 7 Escolhe-se

v racional arbitrário. Nom é necessário escolher w pois $w = v$.

q racional cumprindo $q \neq v$

Os coeficientes do polinómio virám dados polas mesmas fórmulas que no caso anterior.

A quártica terá:

Um único extremo de abcissa q, e nom será simétrica pois haverá um ponto *recto* de abcissa v.

2. Programa

O programa, que pode editar-se e executar-se em calculadoras TI-82, TI-83, TI-85, TI-86 e TI-92, inicia-se oferecendo 7 opções que correspondem a cada um dos sete casos que acabamos de analisar. A versão que aqui apresentamos poderia simplificar-se para as calculadoras mais avanzadas, mas optou-se por manter um formato compatível com a TI-82 que é a mais polular de todas elas no ensino secundário.

Quando se executa, umha vez introduzidos os dados, um comando *goto* levará a alguma das tres opções A, B ou C onde se calculam e exibem os restantes valores de interesse e os coeficientes do polinómio. Estes serão inteiros se assim o som os valores introduzidos. O listado é o que constitue a última página de este trabalho.

3. Referências

Campoy Vázquez, Carlos (1998) Como gerar funções polinómicas cujos pontos de interesse tenham coordenadas racionais. Boletín das Ciencias de ENCIGA. Nº 33, pp.35-44

```
:Menu("R.Y'MPQ/R.Y'VW","5
DISTINTAS",1,"5
IGUAIS",2,"QøV=M=PøW",3,"M
P COM/V=W RE",4,"MP
COM/VøW RE",5,"MPVW
COM/SIM",6,"MPVW
COM/ASIM",7)
```

```
:Lbl 1
:Input "M=",M
:Disp "Pø",M
:Input "P=",P
:(M+P)/2üK:(M-P)/6üX
:Disp "Vø",KåFrac,K+XåFrac,K-
XåFrac,M,P
:Input "V=",V
:Goto A
```

```
:Lbl 2
:Input "Q=",Q
:QüK:Z=0:Goto B
```

```
:Lbl 3
:Input "M=",M
:MüP:MüK
:Disp "Vø",M:Input "V=",V
:Goto A
```

```
:Lbl 4
:Input "V=",V
:VüW:VüS
:Disp "Qø",V
:Input "Q=",Q
:Goto C
```

```
:Lbl 5
:Input "V=",V
:Disp "Wø",V
:Input "W=",W
:(V+W)/2üS
:abs (V-W)üT
:Disp "Q<",S-T
```

```
:Disp "OU Q>",S+T
:Input "Q=",Q
:Goto C
:Lbl 6
:Input "Q=",Q
:Disp "Z=(IMAG A)ø,Z>0"
:Input "Z=",Z
:QüK:Goto B
```

```
:Lbl 7
:Input "Q=",Q
:Disp "K=REAL A,Kø",Q
:Input "K=",K
:Disp "Z=(IMAG A)ø,Z>",(Q-
K)ø/3åFrac:Input "Z=",Z
:Goto B
```

```
:Lbl A
:V+(V-M)(V-P)/(2(V-K))üQ
:K-(M-P)ø/(12(V-K))üW
:6(V-K)üA
:ú12(V-K)(V+W)üB
:36(V-K)VWüC
:ú24MPQ(V-K)üD
:Disp
"Q=",QåFrac,"W=",WåFrac:Pause
:Disp "COEF
X4,X3,Xø,X",A,B,C,D
:Stop
```

```
:Lbl B
:3üA:ú4(2K+Q)üB:6(Kø+2QK+Z
)üC:ú12Q(Kø+Z)üD
:Disp "COEF
X4,X3,Xø,X",A,B,C,D::Stop
```

```
:Lbl C
:1üA:ú4SüB:6VWüC:ú4Q^3-
3BQø-2CQüD
:Disp "COEF
X4,X3,Xø,X",A,B,C,D
:Stop
```