

¿CÚANTAS RANAS HAY EN LA CHARCA?

Antonio Javier Moreno Verdejo

S.E.S. del I.E.S. Trevenque

Angustias Vallecillos Jiménez

Universidad de Granada

1. Introducción

La mayor parte de las actuales orientaciones curriculares para la enseñanza primaria y secundaria y muchos investigadores en el campo de la Educación Estadística coinciden en considerar que la enseñanza de esta materia debe estar asociada a la actividad manipulativa y al uso de datos obtenidos por los propios alumnos. Esta mayor implicación en la obtención de los datos aumenta su motivación para analizarlos y permite una mejor apreciación de su fiabilidad y variabilidad.

En esta línea, y continuando otros trabajos anteriores (Vallecillos y Moreno, 1997; Moreno y Vallecillos, 1998), presentamos una actividad concebida como un proyecto de investigación para la clase de matemáticas. Utilizando una metodología activa y manipulativa se introducen conceptos y terminología básica en Estadística y probabilidad (población, muestra, aleatorio, ...), se enfatizan algunas de las actividades implicadas en el proceso de investigación (obtención de datos y análisis de los mismos, ejemplificación de un proceso de muestreo, ...) y se pone de manifiesto la utilidad de la simulación para la simplificación de complejos experimentos aleatorios.

Por otra parte, también se pone de manifiesto el hecho de que un proceso de modelización de una situación dada proporciona estimaciones de los datos de interés, no su valor exacto. Pueden existir distintas estimaciones y, por tanto, se plantea de manera natural la necesidad de selección de la mejor estimación de entre las posibles.

Incluimos todos los documentos necesarios para la realización de la actividad en clase y algunas referencias mínimas sobre el tema de utilidad para los profesores.

2. El método de captura-recaptura

Los científicos utilizan en la realidad el método de captura-recaptura para estimar el tamaño de una población. El método consiste, de forma simplificada, en capturar animales de la población que se quiere estudiar, marcarlos y devolverlos luego a la población. Más tarde, se captura una nueva muestra (recaptura) y se observan los animales marcados aparecidos en ella. Para estimar el tamaño de la población se utiliza la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Número de animales marcados}(n)}{\text{Número de animales en la población}(N)} = \frac{\text{Número de animales marcados en muestra}(m)}{\text{Número de animales en muestra}(M)}$$

$$n / N = m / M \Rightarrow N = n \times M / m$$

A esta ecuación la denominan Índice de Lincoln y permite determinar N fácilmente, conocidos los demás datos de la proporción.

El método de captura-recaptura exige que se den en la población estudiada algunas condiciones previas que se resumen en los siguientes supuestos:

- (a) Todos los animales tienen la misma probabilidad de ser capturados.
- (b) Las marcas de los animales son indelebles, esto es, no se pueden caer, borrar o hacer invisibles de alguna manera antes de la recaptura.
- (c) La población es cerrada, es decir, no entran nuevos animales a la población durante el estudio.
- (d) Los animales marcados se mezclan aleatoriamente entre la captura y la recaptura.
- (e) La razón de mortalidad entre los animales marcados y los no marcados es la misma.

3. Descripción de la actividad

Comenzamos la actividad situándonos imaginariamente en los alrededores de una charca en donde el croar de las ranas produce un ruido ensordecedor y nos planteamos la siguiente pregunta: **¿cuántas ranas hay en la charca?**

Para ello aplicamos el método de captura-recaptura y procedemos como en el siguiente ejemplo: capturamos 50 ranas (n), las marcamos y las devolvemos al agua con el fin de que puedan mezclarse con el resto de las ranas de la población. Algún tiempo después se vuelven a capturar 20 ranas (M), encontrando que 2 (m) de

ellas habían sido ya previamente marcadas. Si sustituimos estos datos en la proporción establecida previamente para estimar el número de ranas de la charca obtenemos

$$N = 50 \times 20 / 2 = 500$$

que es la estimación del tamaño de la población calculado a partir de la muestra aleatoria de 20 ranas recapturadas.

Para que los estudiantes se familiaricen con la proporción antes de comenzar la actividad propiamente dicha, el profesor puede proponer problemas similares para estimar el tamaño de otras poblaciones de animales.

Una vez que los alumnos se han familiarizado con el uso de la proporción se les entregan los materiales y los documentos necesarios para la realización de la actividad.

3.1. Ciclos y niveles de desarrollo

La actividad tal y como aquí se presenta está diseñada para ser utilizada con alumnos de diferentes edades y niveles de conocimiento estadístico. Habría que seleccionar en cada caso las partes de la actividad que se pueden trabajar en el nivel correspondiente e ir ampliando el vocabulario técnico. Como sugerencia, presentamos el siguiente cuadro orientativo:

Tabla 1: Ciclos y niveles

	1º CICLO E.S.O.	4º E.S.O.	BACHILLERATO
Estudio general del método de captura-recaptura	X	X	X
Obtención de datos	X	X	X
Análisis de las limitaciones del método	X	X	X
Análisis inicial de datos. Diagramas y estimación	X	X	X
Acotación de la estimación. Intervalos de confianza		X	X
Modelización		X	X
Introducción de conceptos estadísticos más complejos			X

La actividad completa, permitirá la introducción de los conceptos más sencillos como los de población y muestra hasta los más elaborados como los de variable aleatoria, estimador, estimador insesgado, distribución de muestreo, media muestral y desviación típica.

3.2. Objetivos

Los objetivos generales que se pretenden alcanzar con el desarrollo de esta actividad son:

1. Introducir los conceptos y la terminología estadística.
2. Utilizar modelos y estudiar sus limitaciones.
3. Utilizar el método de captura-recaptura para estimar el tamaño de una población.
4. Estudiar la variabilidad de las muestras y las estimaciones basadas en ellas.
5. Introducir el concepto de distribución de muestreo.
6. Analizar la influencia del tamaño de la muestra en la distribución de muestreo.

3.3. Materiales

Para realizar la actividad se necesitará un conjunto de tarjetas que representarán las ranas y una caja o contenedor que servirá como charca. También emplearemos una calculadora y los documentos que se acompañan: Ficha de la Actividad para el alumno (Anexo 1) y Hoja de respuestas (Anexo 2).

3.4. Posibles ampliaciones

1. Algunas veces los animales marcados la primera vez no tienen la misma probabilidad de volver a ser capturados que los demás. Unas veces porque tienen miedo y evitan las trampas y otras, por el contrario, les gusta y son más fáciles de capturar. Diseña un experimento con la caja y las tarjetas para averiguar si el tamaño de la población estimada tiende a ser demasiado grande o demasiado pequeña.
2. Hay dos factores, número de animales marcados en la población (n) y tamaño de la muestra (M), que influyen en la variabilidad de la estimación de N cuando se utiliza el muestreo por captura-recaptura. Para dos valores distintos de cada uno de estos parámetros (n y M), estudia su influencia.

Agradecimientos: Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación PB97-0827 de la Dirección General de Enseñanza Superior, MEC, Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

- Landwehr, J; Swift, J. y Watkins, A. (1987). *Exploring Surveys and Information from Samples*. Quantitative Literacy Series. Palo Alto, Ca.: Dale Seymour Pub.
- Lesh, R.; Amit, M.; Schorr, R. (1997). Using “Real-Life” Problems to Prompt Students to Construct Conceptual Models for Statistical Reasoning. En: I. Gal y J. Garfield (Eds.): *The Assesment Challenge in Statistics Education*. The Netherlads: IOS Pres.
- Moreno, A. y Vallecillos, A. (1998). El muestreo en le enseñanza secundaria. En F. Muñoz, Cárdenas, D y López, A. (Eds.): *Actas de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática “Thales”*, (pp. 249-254). Jaén: S.A.E.M. “Thales.
- Schwarz, C. y Sutherland, J. (1997). An On-Line Workshop Using a Simple Capture-Recapture Experiment to Illustrate the Concepts of a Sampling Distribution. *Journal of Statistics Education* 5(1).
- Vallecillos, A. y Moreno, A. (1997). Los profesores de matemáticas y la inferencia estadística en la enseñanza secundaria. En I. Berenguer, B. Cobo y F. Fernández (Eds.): *Investigación en el aula de Matemáticas: La tarea docente*, (pp. 279-287). Granada: Universidad de Granada y Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”. ISBN: 84-920554-6-4.

ANEXO 1: FICHA DE LA ACTIVIDAD PARA EL ALUMNO

Este experimento simula los experimentos que los naturalistas realizan para **estimar** el tamaño **N** de la población de una determinada especie utilizando el método de captura-recaptura que hemos descrito antes. La caja que contiene las cartas representará una charca y cada una de las cartas será una rana. Trataremos de simular como se puede calcular aproximadamente el número de ranas que habitan en la charca.

Repetiremos el experimento varias veces para investigar lo que sucede cuando un procedimiento de muestreo se repite en idénticas condiciones.

1. Extrae de la caja 25 cartas y márcalas (n).
2. Devuélvelas a la caja.
3. Mezcla bien las cartas y extrae una muestra de tamaño 15 (M). Cuenta el número de cartas marcadas en ella (m).
4. Aplica el método de captura-recaptura, basado en que la proporción de ranas marcadas en la muestra coincide con la proporción de ranas marcadas en la población, tal como hemos hecho en el ejemplo anterior. Llamando **N** al tamaño de la población y **m** al número de cartas marcadas que aparecen en la muestra de tamaño 15, obtenemos el valor estimado de N mediante la expresión:
$$N = 25 \times 15 / m$$
5. Apunta todos los datos en la tabla de la hoja de respuestas.
6. Repite los pasos 3, 4 y 5 hasta tener 30 conjuntos de valores en la hoja resumen anterior.

OBSERVA ATENTAMENTE Y RECUERDA:

- La estimación del tamaño de la población varía para cada repetición del experimento. ¿Por qué? Para responder deberás revisar y reflexionar sobre el proceso. El tamaño de la población de ranas se mantiene constante, también el número total de ellas marcadas. Sin embargo, al tomar las muestras (recapturas) aleatoriamente, las ranas marcadas en cada uno de ellas varían de unas a otras. El número de ranas marcadas que obtenemos en cada muestra son los valores de una **variable aleatoria**.
- Seguramente, te habrás sorprendido por lo diferentes que han resultado las distintas estimaciones del tamaño de la población N. Para tener una idea lo más aproximada posible del número de ranas de la charca, esto es, de la precisión de la estimación final que hagamos del tamaño de la población, necesitamos acotar esta variabilidad.
- Para que la estimación anterior tenga sentido, es necesario que podamos igualar la proporción de animales marcados en la muestra con la proporción de animales marcados en la población. Esto requiere el cumplimiento de algunos supuestos, por ejemplo, que los animales no pierdan las marcas. ¿Qué otros supuestos se necesitarían? ¿Cómo afectan estos supuestos a la estimación del tamaño de la población?

ANEXO 2: HOJA DE RESPUESTAS

Experimento	Ranas marcadas en la población n	Tamaño de la muestra M	Ranas marcadas en la muestra m	Tamaño estimado de la población N
1	25	15		
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				

Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué podemos hacer cuando obtenemos una muestra en la que ninguna de las cartas está marcada?
2. ¿Con una muestra de 15 cartas, qué valores del tamaño de la población puedes estimar? ¿Qué podrías hacer para aumentar ese número de valores?
3. ¿Cada experimento estima el verdadero tamaño de la población sin error? ¿En un experimento particular puedes predecir si la estimación estará por encima o por debajo del valor real?
4. ¿Qué fuentes de error podemos encontrar al aplicar el muestreo por captura-recaptura en situaciones reales?
5. Con tu grupo redacta un informe que recoja todas las conclusiones de la actividad.