

OPTATIVAS DE MATEMÁTICAS COMO TALLERES DE INVESTIGACIÓN. UN EJEMPLO: LOS POLIEDROS Y LA BÚSQUEDA DE LOS POLIEDROS REGULARES

Aballe Villero, Miguel Ángel.

Facultad de CC. de la Educación. UCA.

Introducción:

En esta comunicación se presenta a partir del desarrollo de una experiencia concreta en el aula, la posibilidad real de tratar asignaturas de aprendizaje matemático como verdaderos talleres de investigación. Discutimos las virtudes de esta opción y el tipo de problemática que conlleva.

La experiencia se inserta en una asignatura optativa de 6 créditos ofertada en segundo curso de algunas especialidades de Maestro, con un grupo poco numeroso de alumnos matriculados. Uno de los objetivos fundamentales de la asignatura es reconstruir el conocimiento matemático de los alumnos.

Mi objetivo principal es intentar que trabajen como investigadores que piensan individualmente, trabajan en pequeños grupos y que comunican sus resultados con los de otros, es decir vivan el constructivismo social (Ernest, 1998). Para ello han de acostumbrarse a organizar la información (tablas) y extraer conjeturas o resultados firmes en forma de pautas, leyes, fórmulas, enunciados, ..., evitando el uso de fórmulas "aprendidas", uno de los problemas habituales de los alumnos (Aballe Villero, 1999). Por lo tanto incido más en el aprendizaje procedimental que en el conceptual, que sin duda también queda afianzado en los puntos que se tocan.

Al comienzo de cada nuevo curso, se observa un conjunto de actitudes negativas: Dirigirse al profesor, más que al grupo; falta de método y orden; hablar sin escuchar; el individualismo; desconfianza en la utilidad de la totalidad de las ideas, propias y ajenas; etc. Aunque no todos, muchos consiguen superar estas actitudes al final del curso. Una amplia mayoría valora esta forma de trabajar las matemáticas, con la resolución de problemas abiertos, no vivida con anterioridad. Pensamos que nuestros alumnos, futuros maestros, aprenden sobre todo didáctica de las matemáticas.

--- Desarrollo:

La experiencia de clase que presentamos se desarrolla en el tramo final del curso 1998-99, en cuatro sesiones de una hora y media, aproximadamente, después de haber trabajado una variedad de problemas, aunque ninguno de índole geométrica. Una buena referencia para el tópico tratado se encuentra en Lakatos (1978), ... pero la nuestra es una experiencia real.

El trabajo lo subdividimos en tres grandes fases, organizadas según los niveles de Van Hiele (NCTM, 1987):

A) Visualización y análisis de poliedros (se entenderá convexos, siempre). B) Deducción de propiedades. C) Poliedros regulares (análisis y deducción). Éstas se subdividen en ocho intervalos temporales independientes en total (A1, A2, ... y C3), para cada uno de los que recogí por escrito las "conclusiones", excepto en las discusiones de gran grupo de las que tomo anotaciones "en vivo".

Abreviaturas: GR = grupos independientes (5 grupos, G.1 a G.5, de 3 ó 4 alumnos). GG = gran grupo, los 16 alumnos.

A1) (GR) Imaginar poliedros con ayuda de la sola definición. Identificarlos por medio de nombres, dibujos o descripción. Analizándolos en sus componentes, tipo y número de caras, aristas y vértices.

Ahora juega más la imaginación, que luego con el material que favorecerá la creatividad. Aparecen poliedros variados; los más comunes, en los cinco grupos, son el cubo y la pirámide cuadrangular. Los siguientes más obtenidos son algún paralelepípedo más y alguna pirámide triangular.

A2) (GR) Misma actividad pero con la ayuda de las piezas de Polydrón (polígonos regulares de 3 a 6 lados, de plástico y encajables; que combinados permiten obtener también caras con forma de rombo, rectángulo, trapecios, etc.).

En esta fase es menos común la descripción por dibujos, y aparece más la nominativa. Junto a nombres tipo estándar, aparece nomenclatura incompleta o idiosincrásica. Ejemplos:

antiprisma hexagonal = "*bombonera*" y "*tambor*" (v. dibujo);

bipirámide triangular = "*romboedro triangular*" y "*romboides*";

octaedro regular = "*romboedro de cuadro*", bipirámide pentagonal = "*decaedro*" (sin más).

El material ayuda a afianzar los resultados y hace que aparezca mayor cantidad de poliedros con presencia importante o exclusiva de triángulos (tetraedro, octaedro, bipirámide triangular, antiprisma hexagonal) y otros más complicados (dodecaedro) o que no entran en las clasificaciones habituales, difíciles de ser imaginados sin la ayuda material. Pero desaparecen algunos de la fase anterior, más creativos o difíciles (o imposibles) de construir con el material: pirámides cuadrada y hexagonal y varios prismas.

A3) (GG) Tabla común con los datos obtenidos.

Entre todos, se completa una tabla en la pizarra con los datos obtenidos en las fases anteriores (para ser usada por todos). Aparte de los tipos de caras o de vértices, siempre se presentan los datos del número de caras, de aristas y de vértices (C, A y V, respectivamente, a partir de ahora). La siguiente tabla es un resumen; sólo presentamos algunas de las figuras, como referencia:

	C	A	V		C	A	V		C	A	V
Octaedro	8	12	6	Tetraedro	4	6	4	Cubo	6	12	8
Prisma Pentagonal	7	15	10	Prisma triangular	5	9	6	Tambor	14	25	12
Pirámide Cuadrada	5	8	5	Dodecaedro	12	30	20	Decaedro	10	15	7

(*) Para el "tambor" colocamos A=25 tal como se escribió originalmente (en realidad es 24).

B1) (GR) Investigar sobre la tabla común. Algunas observaciones interesantes sobre la tabla, buscando una ley general.

Naturalmente, se pueden detectar algunos errores entre una mayoría de afirmaciones acertadas.

- Grupo G.1, observaciones simples: "Cuantas más caras, más aristas", "Tenemos más poliedros de C par, que impar". Y "A siempre es mayor que C y que V".

- El G.2 se caracteriza por su voluntad "compositiva" con afirmaciones, como éstas: "Cinco tetraedros forman un decaedro. Dos tetraedros forman uno que tiene seis caras. Dos pirámides de base cuadrada al ser unidas por sus bases forman un octaedro".

- El G.3: Una fórmula no general, $V = 2/3 A$, y una observación simple: "Normalmente en un vértice convergen 3 aristas, aunque hay casos que no".

- El G.4 es el de "la paridad". Por ejemplo: "Casi siempre V es par (excepto en [...]). Siempre que V sea par, C será igual o llevará una diferencia de 2 unidades más o menos, exceptuando [...]". "Siempre que C es par, $A + V$ es par". " $C + A + V$ es siempre par excepto para el tambor" (había un error en la tabla, que se descubriría luego; en realidad no hay excepciones).

- El G.5: "Cada arista participa en dos vértices". "Cada vértice [del poliedro] está formado como mínimo por tres vértices [de la cara poligonal]". Fórmula: " $C/2 \times \text{número lados de una cara} = A$ ". Relación, " $A > V^3 C$ ". Finalmente, " $V = (A - C) + 2$ "; la fórmula de Euler, uno de mis principales objetivos "ocultos", no es más que un apéndice.

B2) (GG) Puesta en común de las conjeturas de los alumnos.

- La fórmula $V = 2/3$ de A, se cumple en muchos casos, pero con excepciones. Se conjetura que es válida si todas las caras son iguales. Se muestra que no: el octaedro (con caras iguales) es excepción, mientras que el prisma pentagonal la cumple.

- Una regla para poliedros con sólo triángulos [llamados deltaedros]: "Si los vértices aumentan en 1, las aristas lo hacen en 3 y las caras en 2" (esta observación se relaciona con la forma en que podemos construir los deltaedros (Pérez Jiménez, 1992). Luego, Miguel (G.5) lo generaliza exponiendo su ley de Euler, que pasa sin mayor interés. Él pone más énfasis en que " $A = C/2 \times \text{núm. lados, si todos los polígonos son iguales; y, si hay varios tipos de caras, se cuenta por partes}$ ". Alguien advierte que la figura "tambor", tiene A=25 y el cálculo da 24. Al contar todos más cuidadosamente se detecta un error de conteo, por lo que la fórmula gana validez.

- "Si C=par, $A+V$ =par". La excepción del "tambor" deja de serlo tras la corrección, A=24.

- alguna pregunta sin respuesta: "¿Cómo puede ser que $V=C$ en algunos casos, si se necesitan 3 caras o más para un vértice?".

C1) (INDIVIDUAL) Conjeturar cuántos poliedros regulares [convexos] existen. Después de ser definido por el profesor: "Un poliedro es regular (P.R. a partir de ahora) si todas sus caras son polígonos regulares iguales, y todos sus vértices son iguales (es decir confluyen igual cantidad de aristas o caras)".

Todos citan, como ejemplos, el cubo y el tetraedro; algunos añaden el dodecaedro y más raramente el octaedro. Algunos incluyen errores: pirámide cuadrada, prisma pentagonal, decaedro, "uno de 12 hexágonos" y el más repetido, la bipirámide triangular.

La conjetura más extendida proviene de una supuesta analogía con los polígonos regulares: "por cada polígono regular, debe existir un P.R., al menos". Y que, por lo tanto son infinitos: "sólo hay que juntarlos [los polígonos]". La opinión individual más acertada (de Conchi), que desaparecerá al unirse a su grupo: "Pueden existir muchos, aunque limitados [...] existirán más polígonos irregulares ya que es difícil que coincidan 2 ó más lados

iguales".

C2) (GR) Misma actividad pero ya en grupos.

Los grupos subsanan errores individuales de catalogación de poliedros como P.R.. Pero en ocasiones el grupo no cita aciertos individuales como el octaedro (G.3) o el dodecaedro (G.1). El G.5 conjetura que, para el poliedro menor que se construya con un polígono regular (a partir del pentágono) se cumplirá que: " $C = (\text{lados polígono} + 1) \times 2$ ". En el mismo sentido, el G.3 modifica inicialmente una aportación individual (poliedro de 12 hexágonos) aventurando que tendrá 14. No obstante en el último momento se desdican y escriben que "*no cierra el hexágono*", es decir, no se puede construir un P.R. con hexágonos.

Algunas conjeturas generales sobre la cantidad de P.R.:

-- G.1: Como todos, indican que por cada polígono regular habrá un P.R., o más (aportando el ejemplo del tetraedro y el icosaedro, ya construidos por ellos en este momento).

-- G.2: "*Existen tantos poliedros como polígonos, [...] infinitas combinaciones de números que cumplen la regla del P.R.*". Este grupo, en su línea, (v. fase B1), afirma que uniendo dodecaedros debe obtenerse un poliedro mayor, de caras pentagonales.

-- El G.3 cita los casos de la unión de dos cubos o dos tetraedros como ejemplos de que "*la unión de dos P.R. no conforma otro P.R.*" (v. comentario anterior del grupo G.2, que está trabajando independientemente).

-- G.4: "*Infinitos, ya que \$ infinitos números y esto será aplicable al número de C, V y A.*".

-- El G.5 es el que está sentando mejor las bases. Establece que "*el poliedro mínimo está formado por cuatro caras*" y que "*con triángulos, los vértices van desde vértices con 3 aristas hasta vértices con 5*", resultando los de "*4, 8 y 20 caras*".

Las principales discusiones concretas dentro de los grupos se centran en si se pueden construir más P.R. con triángulos y si es posible construir alguno con hexágonos. No se plantea aún la necesidad de conocer los ángulos interiores.

Finalmente varios grupos están recubriendo la mesa con triángulos y hexágonos. La animación es importante. Los alumnos pasan de forma natural a la fase siguiente (comunicación entre grupos) ya que el trabajo está avanzado.

C3) (GG) Puesta en común. Conclusiones sobre poliedros regulares.

Una idea de la evolución de la discusión final la da la siguiente selección de diálogos y actividades, presentadas en su verdadero orden temporal, a los que añadimos nuestros comentarios. Advertimos que, a estas alturas, todos conocen ya la existencia de estos P.R. (que son todos): tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.

Se discute sobre si la limitación del material, imperfecto, es lo que hace parecer que un conjunto de hexágonos no se "*cerrará*" formando algún poliedro. Al colocar muchos encajados y elevarlos al aire, se muestra que toma forma no plana [el material cede]. La hipótesis más extendida es que se podrá con muchos hexágonos. Se alude a la esfera como límite.

- Chiqui: "*Con 12 pentágonos sí cierra, con 12 hexágonos no. Debe ser que los que tienen número de lados par no pueden... aunque el cuadrado sí*".

- Cristóbal: "*No es por los lados, sino por los ángulos*". Muestra con el retroproyector la sombra de tres pentágonos convirgiendo y el hueco que dejan (de 36°). Pero no es argumento definitivo para el GG; el final no está cerca.

Aparece el "*balón de fútbol*" (icosaedro truncado, 12 pentágonos más 20 hexágonos) y se plantea la disyuntiva de si "*tiene los pentágonos para que pueda cerrar*" o "*para que cierre antes*".

La discusión se detiene para trabajar manipulativamente. El profesor es poco más que un observador, con pequeñas intervenciones; el ritmo lo marcan los alumnos. Al cabo de unos minutos se continúa con la discusión en voz alta, gran grupo.

- Antonio: "*¡Qué raro que [...] haya algún polígono con el que no se pueda!*".

Pasando del heptágono, se aborda el octógono, fácil de dibujar (la señal de "stop"). Va aceptándose que con el hexágono no se puede, pero se piensa que con el octógono sí. Se hace un dibujo al que se refieren:

"*Este hueco es el que hace que se pudiera hacer en el espacio*". Se discute si se puede cerrar con o sin ayuda de otros polígonos. Algunos se dedican a hacer dibujos en la pizarra.

Abel dibuja y recorta algunos octógonos en papel, para poder manipularlos.

Luis ha dibujado en la pizarra un desarrollo en cruz del cubo, con los cuadrados recortados por los vértices para obtener 6 octógonos unidos. Al lado la figura ya cerrada (cubo truncado) con octógonos y triángulos.

Diego generaliza: "*Con el octógono no se puede; los de lados pares necesitan de los de lados impares, como éste y el balón de fútbol*".

Mingue retoma los ángulos: "*Vemos que los ángulos crecen; 4 lados, 90°; 5 lados, más de 90°; 6 lados, 120°. Como $120^\circ \times 3 = 360^\circ$, y 360° es el límite, a partir del hexágono no cierra*". El GG lo toma como una observación más.

Mientras tanto está circulando un libro (Olmo Romero et al, 1989), que traía Jose, del que Antonio lee (p.125): "...Ángulo diedro divisor de 360° ...". Esta frase fuera de contexto le hace pensar que con hexágonos sí se podrá.

El profesor explica la diferencia entre ángulo diedro e interior, pero la duda persiste.

Con los octógonos de papel que hizo Abel: Sobre el plano todos ven que dos unidos dejan 90° de hueco. Cristóbal piensa que al ir formando ángulo [diedro], el hueco podrá abrirse para acoger a otro octógono. Los demás le insisten en que lo que ocurrirá será justo lo contrario, sin convencerlo del todo.

Se propone pensar en cómo están contruidos los CINCO que tenemos encontrados hace tiempo. Miguel hace un esquema con los vértices respectivos desarrollados en el plano: El tetraedro con 3 triángulos, el octaedro con 4, etc.. Después de lo aprendido anteriormente, el GG concluye que con cuadrados, la única posibilidad es unir tres por vértice, pues con cuatro se tiene $90^\circ \times 4 = 360^\circ$. Igualmente con el pentágono, retomando la idea de Cristóbal al principio.

Aunque a muchos les cuesta trabajo creerlo (hace poco pensaban que había infinitos), se acaba aceptando que no se pueden construir más de los cinco que ya teníamos. El resultado se entiende que no es lo más interesante; sino el haber vivido una vez más la experiencia de crear matemáticas. El problema no queda "cerrado del todo". Se podría haber profundizado en muchos aspectos, o haber asentado mejor algunas ideas. Esa sensación queda en los alumnos y es positiva.

--- Conclusiones:

Naturalmente tanto la fórmula de Euler como la existencia de sólo 5 P.R. pueden ser explicadas aparentemente de forma clara, fácil y lógica, en muy poco tiempo, especialmente a alumnos universitarios, por ejemplo utilizando un libro de texto (Guillén Soler, 1991; pp.46-47). Lograríamos que esos resultados fuesen aceptados por los alumnos como válidos, pero "perderíamos mucho" con la elección.

Por otra parte, a veces se presenta el aprendizaje por descubrimiento como algo simple (Pérez Jiménez, 1992, pp.31-32). Normalmente el desarrollo es mucho más complejo en una experiencia real, y el profesor no puede prever las "novedades" que muestra el proceso cada vez que lo aplica a un nuevo grupo de alumnos pensantes. Hemos asistido a un proceso vivo con avances, retrocesos y vías muertas. Muchas veces, se dan pistas "decisivas" (desde el punto de vista del profesor), y que simplemente son menospreciadas o no aceptadas. Cuando las ideas han salido de compañeros, y no del profesor, la posibilidad de discusión es mayor; no tienen marchamo de autenticidad.

El material es una ayuda importante, aunque en alguna fase es interesante su ausencia.

La actividad grupal suele mejorar los resultados individuales aunque, a veces, aborta ideas particulares.

Con esta actividad he evaluado el grado de autonomía y seguridad del alumnado en relación a su trabajo investigador, que es superior. Las actitudes de trabajo son el principal punto de mejora del alumnado con este tipo de metodología. En el lado negativo, la gran cantidad de tiempo que se emplea.

El conocimiento conceptual sobre los tópicos matemáticos que se tratan (sean el núcleo o herramientas para un problema concreto), queda mejor asentado.

El aprendizaje más importante, por su utilidad como futuros maestros, es conocer (de forma vivida, no teórica) cómo se pueden construir las matemáticas. Se convencer de la variedad de caminos que se pueden encontrar al tratar un problema, en busca de una resolución válida. La mayoría de los alumnos descubren una forma atractiva, con sus limitaciones, de trabajar las matemáticas desconocida para ellos.

BIBLIOGRAFÍA

- Aballe Villero M.A., (1999), "Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria", en preparación. Ampliación de la comunicación presentada al VIII ICME (Sevilla, 1996).
- Ernest P., (1998), "Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics". Ed. State University of New York Press.
- Guillén Soler G., (1991), "El mundo de los poliedros". Colección "Matemáticas: Cultura y aprendizaje", nº15. Ed. Síntesis.
- Lakatos I., (1978), "Pruebas y refutaciones". Alianza Editorial. Madrid. (De la versión en inglés, 1976, "Proofs and refutations". Oxford Univ. Press. London.).
- NCTM, (1987), "Learning and Teaching Geometry, K-12" (Cap. 1). Yearbook.