

LOGOLABORATORIO: MATEMÁTICAS CON LOGO EN LA ESO

Joan Aranès Clua

Departament de Matemàtiques
IES Martí l'Humà, Montblanc

Palabras clave:

Logo: primitiva, procedimiento, función, variable, proyecto, recursividad, entorno, iteración, variable, geometría de tortuga, geometría de coordenadas; modelización, autosemejanza, fractal, número primo.

Resumen:

Se presenta una propuesta de crédito variable de matemáticas basado en un enfoque experimental basado en Logo y que lleva por título: *Logolaboratorio Matemático*. Con ello se intenta describir la metodología experimental y de modelización que se ha seguido incidiendo en aspectos tanto geométricos como numéricos desde un enfoque globalizador: polígonos, curvas espirales, fractales, divisibilidad, funciones y proyectos de modelización. *Logolaboratorio* se puede ofertar, con las adaptaciones convenientes, en los dos ciclos de ESO y se ha realizado ya varias veces con alumnos de segundo y tercero de ESO. Se expone también la metodología de evaluación, la dinámica de trabajo en el aula y el uso del navegador junto con red local de PCs del aula de informática para compartir y distribuir información: apuntes, ejercicios resueltos, etc.

SUMARIO

1. Qué es Logo ?
2. *Logolaboratorio*: Qué, cómo y para qué ?
3. Las actividades y los proyectos de aula: algunas propuestas
4. Bibliografía y otras referencias

1. QUÉ ES LOGO ?

Según Seymour Papert, creador del lenguaje Logo (1969) y colega en el MIT de Marvin Minsky, uno de los pioneros más conocidos de la Informática Avanzada (IA), por *Logo* debe entenderse, a la vez que un lenguaje de programación de ordenadores, una metodología didáctica basada en la resolución de problemas, la exploración y la creatividad. En 1980, Papert publicó *Mindstorms: Children, Computers & Powerful Ideas*¹ dónde exponía sus puntos de vista sobre *Logo*.

Logo es un lenguaje de programación que, en cierto modo, puede considerarse de tipo procedural, aunque también está enfocado al tratamiento de listas y funciones; *grosso modo* un programa Logo se compone de un conjunto de funciones o procedimientos que se reclaman unos a otros haciendo uso de estructuras de datos en forma de lista, por ello podría considerarse también dentro del enfoque funcional.

De hecho, Logo proviene del lenguaje Lisp (**L**ist **p**rocessing) -- desarrollado por John Macarthy en el *Artificial Intelligence Group* del MIT en 1959 --, uno de los primeros lenguajes funcionales con los que se empezó a investigar en IA. A partir de la segunda mitad de la década de los setenta el uso de Logo se popularizó en los ambientes educativos. Con la aparición de los PCs se añadieron las actuales prestaciones de visualización gráfica y Logo empezó a conocerse por la *geometría de tortuga*. En 1981, se consolidó como la herramienta que hoy en día conocemos, mejorada naturalmente, con las progresivas innovaciones en los equipos y en las interfaces de usuario. Una de esas modernas versiones es WinLogo v. 2.10 para W95 y Windows 3.1. (1998), de P&P Servicios de Comunicaciones S.L., distribuido a los centros educativos por el Departament d'Ensenyament (Generalitat de Catalunya). Logo no es un lenguaje compilado sino interpretado, cosa que proporciona una deseable interactividad de acuerdo con el enfoque didáctico en el que se inscribe. Eventualmente, también podremos implementar Logo haciendo uso de otros lenguajes de programación (Pascal, C/C++, Java, Basic, incluso en una calculadora gráfica de altas prestaciones del estilo de la TI92) además de poder hacerlo también con diversos paquetes de cálculo como DERIVETM; será preciso, sin embargo, conseguir o construir los módulos de librería necesarios para enlazarlos en los programas que diseñemos con esos otros lenguajes.

Con Logo podemos crear *micromundos* geométricos apropiados para la experimentación y la visualización de propiedades y para observar los cambios que son consecuencia de modificar los valores de las *variables* cuando recreamos un determinado *modelo*. Como aplicaciones avanzadas podemos simular la evolución de un *sistema dinámico* y visualizar los resultados correspondientes a diversos *escenarios*. La característica más

¹ traducido al castellano con el título *Desafío a la mente. Computadoras y educación*, editado por Editorial Galápagos, Buenos Aires.

conocida de Logo es la *tortuga* que se desplaza por la ventana gráfica del entorno dotada de lápices de colores, goma de borrar, lupas ... y otras herramientas. Incluso pueden ser varias a la vez las tortugas activas. Escribiendo y validando las primitivas y procedimientos en la ventana *de trabajo* (dónde aparece el código Logo) las *tortugas* seguirán las instrucciones que les demos como si de pequeños *robots* se tratase. De esta forma podremos tomar consciencia de propiedades matemáticas del *micromundo* que estemos desarrollando. Logo es pues una buena herramienta para aproximarnos a la metodología de la modelización y por lo tanto lo es también para aprender desde un enfoque creativo y reflexivo.

2. LOGOLABORATORI: QUÉ, CÓMO Y PARA QUÉ ?

En el crédito de ampliación que he venido realizando con alumnos de segundo ciclo de ESO desde un par de cursos atrás se trabajan contenidos relacionados con la geometría, el álgebra -- por la necesidad de hacer manipulaciones simbólicas con papel y lápiz a la hora de diseñar procedimientos y comprender el problema -- y teoría de números. Si bien los contenidos aparecen en la parte común del *currículum*, en *Logolaboratori* me he esforzado aún más en presentarlos y trabajarlos de una forma más globalizadora y, sobre todo, experimental: orientándolo a la creación de algoritmos y programas Logo que permitan a los alumnos y alumnas resolver o por lo menos adentrarse en problemas abiertos a partir de la modelización y las técnicas de resolución de problemas.

Los contenidos deben seleccionarse en función de la ubicación del crédito en el ciclo; por lo tanto, es deseable que se re programe el crédito de acuerdo a las circunstancias particulares en que se encuentre el profesor o profesora. Por otro lado, atendiendo la diversidad de los diversos intereses y ritmos de aprendizaje es aconsejable que el alumno pueda escoger entre diversas propuestas de actividades y proyectos de distinto grado de dificultad y extensión: des de reproducir una figura geométrica sencilla con un procedimiento Logo (un polígono regular, por ejemplo) hasta la elaboración de un proyecto de modelización más complejo como el del movimiento aleatorio en una área rectangular, la representación cartesiana de una función o la construcción de objetos fractales.

El profesor puede empezar pues planteando un determinado *problema*; podría simplemente dibujar una figura geométrica más o menos complicada en la pizarra (un esbozo de cara, con rasgos circulares o poligonales, por ejemplo). Habiendo comprendido el problema planteado, los alumnos y alumnas elaborarían un modelo matemático propio a partir de conocimientos elementales ya adquiridos a través de la construcción de otras figuras más sencillas (polígonos, circunferencias, objetos radiales, espirales ...). Se les debería recomendar que además de hacer pruebas en el micromundo (con el ordenador) escribieran con lápiz y papel sus *procedimientos*, los diagramas para estructurar el *proyecto* (diagramas de árbol de los procedimientos), hacer algunos cálculos valiéndose de los resultados elementales sobre números o geometría, etc. Concluida esa fase de planteamientos y pruebas, empieza la fase de codificación en Logo, experimentando y corrigiendo siempre que sea necesario. Finalmente, cuando ya todo parece que funciona, debe explotarse el programa, empezando así los verdaderos experimentos con el micromundo para visualizar y aprender las propiedades que el profesor o profesora pretende que sean *descubiertas*. Se pretende pues que los alumnos y alumnas aprendan a crear y a analizar, ejercitando sus capacidades reflexivas, críticas y creativas; se darán cuenta casi siempre del hecho que los *problemas* suelen ser abiertos y que la mayor parte suelen quedar abiertos a ulteriores curiosidades y preguntas, tal y como, de hecho, acontece en la realidad.

A lo largo de todo el crédito y de forma paralela a los contenidos matemáticos se introducen progresivamente los métodos, conceptos y contenidos específicos sobre programación en Logo: iteración y renuencia, condicionamiento; ámbito de validez de las variables. Con el fin de facilitar la consulta de información, he preparado la documentación en formato HTML para que los alumnos puedan consultarla mediante el *navegador* de su PC usando la *red local* del aula de informática; de ese modo he ahorrado en fotocopias y, de forma transversal, los alumnos y alumnas se familiarizan con el uso de las redes y la publicación electrónica. Los documentos HTML se ubican en el disco compartido de uno de los ordenadores del aula. El uso de la red local, permite además pasar ficheros de ejemplo y compartir otros dispositivos que pueden ser interesantes en algunos proyectos (digitalizador y impresora).

Objetivos didácticos: construir modelos, colaborar en grupo, adquirir el hábito de verificar resultados, crear algoritmos, estructurar ideas, enlazar las diversas partes de la matemática, ejercitar la comunicación, construir programas compuestos de diversos procedimientos, aprender a hacer uso de diagramas y pseudocódigo para plantear problemas.

Contenidos conceptuales: números y divisibilidad, el teorema de la poligonal cerrada, polígonos, la circunferencia, espirales, procesos iterativos, funciones.

Contenidos procedimentales: elaboración de modelos geométricos utilizando tanto la *geometría de tortuga* como la *g. de coordenadas*; utilización de procesos recursivos e iterativos; construcción de algoritmos que incidan en resultados elementales de la geometría elemental y la teoría de números; modelización de sistemas sencillos.

Contenidos actitudinales: Valoración del esfuerzo, de la perseverancia y la flexibilidad en la búsqueda de soluciones; consideración de los procesos heurísticos; organización y planificación del trabajo en tareas; disposición a la comunicación; incentivación de enfoques globalizadores y diversificados de un determinado problema; adquisición de la noción de modelo y valoración de su validez como abstracción de la realidad.

3. LAS ACTIVIDADES Y LOS PROYECTOS DE AULA: ALGUNAS PROPUESTAS

Muchas y variadas propuestas pueden servir para realizar las actividades de aprendizaje: el estudio del comportamiento de una sucesión y la suma de un número determinado de sus términos; encontrar la solución aproximada de una ecuación de forma iterativa; realizar una búsqueda de números primos; construir y estudiar diversos objetos geométricos en el plano (espirales, figuras *autosemejantes*, etc), dibujar curvas funcionales, etc. Sería muy conveniente, entre otras cosas, trabajar los contenidos relativos a los *movimientos* y *semejanzas* en el plano y también los aspectos básicos sobre *vectores* así como incidir en las propiedades de objetos fractales sencillos (árboles binarios, curva de Von Koch, curva de Sierpinsky, etc) valiéndonos de la recursividad que nos brinda Logo. El azar y la probabilidad pueden también trabajarse con propuestas del tipo: evaluar el número π mediante una simulación por el método de Monte Carlo; diseñando juegos sencillos en los que además aparezcan estrategias de competencia, por ejemplo una tortuga persiguiendo a otra, entre otras muchas posibilidades.

A continuación expongo, a modo de ejemplo, algunos procedimientos Logo relacionados con diversos problemas que se podrían plantear en el aula:

3.1. Construcción de polígonos regulares de n vértices (nombre.vèrtexs) y de longitud l (costat) haciendo uso del teorema de la poligonal cerrada simple (la suma de los giros es igual a 360°)

procediment polígons_regulars :costat :nombre.vèrtexs

```
repeteix :nombre.vèrtexs
[
  av :costat
  gd 360/:nombre.vèrtexs
]
```

fi

3.2. Construcción de una *circumferència* a partir de un model poligonal

procediment circumferència :radi

```
repeteix 360
[
  av 2*pi*:radi/360
  gd 1
]
```

fi

3.3. Muestrario de espirales equiangulares

procediment espiral :angle

```
fes.local "costat posa.a "costat 4
inicia.dibuix
fes.color (atzar 255)+1
rep 100 [av :costat gd :angle posa.a "costat :costat+1]
```

fi

procediment pel.lícula

```
fes.local "angle posa.a "angle 1
fes.fons 1
repeteix 360 [espiral :angle espera 100 posa.a "angle :angle+1]
```

fi

3.4. Autosemejanza

QUADRATS DINS DE QUADRATS

procediment quadrats.dins.de.quadrats :costat :nivell

```
comprova :nivell = 0
si.ver
```

```

    [acaba]
    repeteix 4 [quadrats.quadrats.dins.de.quadrats :costat/2 :nivell -1 av:costat gd90]
fi
3.5. Aproximación a los objetos fractales
TRIANGLES DINS DE TRIANGLES (triangle de Sierpinsky)
procediment Triangles.dins.de.triangles :costat :nivell
    comprova :nivell = 0
    si.ver
        [acaba]
    repeteix 3
        [Triangles.dins.de.triangles :costat / 2 :nivell - 1 av:costat gd120]
fi
3.6. Divisibilidad. Búsqueda de números primos.
procediment Genera.nombres.primers :nombre_enter_fins_on_cal_buscar
    fes.local "nombre.inicial
    posa.a "nombre.inicial 2
    escriu.seguit 2 escriu [...és un nombre primer]
    repeteix :nombre.enter.fins.on.cal.buscar
    [
        Digues.quin.nombre.és.primer :nombre.inicial
        posa.a "nombre.inicial (:nombre.inicial + 1)
    ]
fi

procediment Digues.quin.nombre.és.primer :n
    fes.local "divisor
    fes.local "fita_del_bucle
    posa.a "divisor 2
    posa.a "fita.del.bucle part.entera (arrel :n)
    repeteix :fita.del.bucle
    [
        si (residu :n :divisor) = 0
            [acaba]
            [posa.a "divisor (:divisor+1)]
    ]
    escriu.seguit :n escriu [...és un nombre primer]
fi
3.7. Divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.
procediment mcd.rudimentari :a :b
    si :a=:b
        [escriu.seguit [mcd=] escriu :a acaba]
    [
        si :a<:b
            [posa.a "b :a]
            [posa.a "a (:a - :b) mcd.rudimentari :a :b]
        ]
    ]
fi
procediment mcd.i.mcm.Euclides :a :b
    fes.local "r
    fes.local "dividend
    fes.local "divisor
    si :a > :b
        [
            posa.a "dividend :a
            posa.a "divisor :b
        ]
    [
        posa.a "dividend :b
    ]

```

```
    posa.a "divisor :a
  ]
repeteix :dividend
[
  posa.a "r residu :dividend :divisor
  si :r=0
  [
    escriu.seguit [mcd =] escriu :divisor
    escriu.seguit [mcm =] escriu :a * :b / :divisor
    acaba
  ]
  [
    posa.a "dividend :divisor
    posa.a "divisor :r
  ]
]
fi
```

BIBLIOGRAFÍA

Abelson, H; diSessa, A., *Geometria de Tortuga. El ordenador como medio de exploración de las Matemáticas*. Ediciones Anaya Multimedia, S.A., Madrid, 1986.

J. Aracil, *Introducción a la dinámica de sistemas*. Alianza Universidad, Madrid, 1986.

Sitios en Internet:

- P&P Servicios de Comunicaciones S.L.: <http://www.wlogo.com>

- El País de la Tortuga: <http://www.xtec.es/logo/index.htm>

- Curs de Logo del Programa d'Informàtica Educativa (PIE): <http://www.xtec.es/formacio/curstele/d52/>

- Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (XTEC): <http://www.xtec.es>