

UNA APROXIMACIÓN A LA TEORÍA DE NUDOS DESDE EL TALLER DE MATEMÁTICAS

Cristina María Ramos García
José Fco. Morones Burgos

Introducción.

Los nudos han servido para fines prácticos o decorativos desde tiempos inmemoriales. Los marinos han ideado nudos muy elaborados para sus necesidades. Sólo a fines del siglo XIX comenzaron los matemáticos a interesarse por los nudos. Lord Kelvin, por ejemplo, se esforzó en deducir la estructura de la tabla periódica de los elementos tomando como hipótesis que los átomos eran, en realidad, vórtices anudados en el seno del “éter”. Aunque dicho trabajo resultó infructuoso, sirvió de inspiración a Peter G. Tait para crear las primeras tablas de nudos, donde éstos se enumeraban atendiendo a cierto orden de complejidad. La teoría de nudos se ha convertido desde entonces en una rama fecunda de la Topología, en la que se entremezclan álgebra, geometría, teoría de grupos, teoría de matrices, teoría de grafos, teoría de números y otras ramas de las Matemáticas.

La belleza de la teoría de nudos radica justamente en lo muy familiares que son sus principales objetos de estudio: basta tomar un cordel y unir sus extremos (véase figura 1, A). Por esta razón creímos que sería interesante abordarla desde el Taller de Matemáticas, con objeto de buscar nuevos planteamientos metodológicos que ayuden a los estudiantes de ESO y Bachillerato a potenciar su creatividad, intuición y capacidad de observación. Este proyecto está aún en fase de preparación y esperamos poder llevarlo a cabo en el próximo curso escolar.

Definición de nudo.

La Topología se interesa por aquellas propiedades de los espacios que permanecen inalterables al deformarse éstos arbitrariamente. Uno de los métodos empleados en tal investigación consiste en sumergir un objeto en un espacio y ver cómo se comporta la parte desocupada del espacio. De esta manera surge la definición matemática de nudo:

Un nudo es una curva cerrada inmersa en el espacio tridimensional, que comienza y termina en un mismo punto, y que no se corta a sí misma.

Es esencial darse cuenta de que la propiedad de “anudación” no es intrínseca de la curva, sino de la forma en que la curva se encuentra alojada en el espacio ordinario. En realidad, una curva unidimensional sólo puede estar anudada en el espacio tridimensional. El espacio de dimensión dos no es lo bastante holgado como para anudar la curva; y si viviéramos en un mundo de dimensión cuatro podríamos desanudar todos los nudos, ya que la dimensión extra nos da suficiente espacio para desatarlo.

Nudos semejantes.

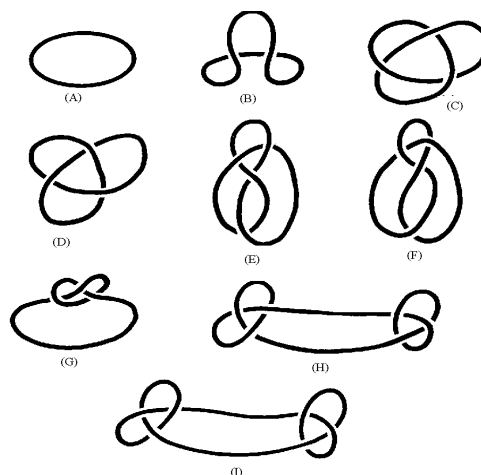
Los nudos pueden describirse mediante diagramas bidimensionales, llamados diagramas planares, como los que presentamos en estas páginas. En general, resulta muy difícil distinguir un nudo de otro observando su representación plana y, aunque existen formas rigurosas de definir la igualdad de nudos, aquí nos limitaremos a emplear analogías físicas que puedan ser fácilmente comprendidas y comprobadas por los estudiantes. Así pues, diremos que:

Dos nudos son semejantes si es posible lograr que ofrezcan exactamente el mismo aspecto tensando o aflojando la cuerda sin cortarla, o cuando uno de ellos es la imagen especular del otro.

Un método alternativo para averiguar si un nudo es semejante a otro consiste en alojar cada nudo en dos tubos sólidos y flexibles (por ejemplo, dos trozos de manguera), respectivamente. Si uno de ellos puede estirarse, contraerse o retorcerse hasta alcanzar la forma del otro, sin romper el tubo ni hacerlo pasar a través del mismo, entonces será semejante al segundo nudo.

Figura 1

En la figura 1, los nudos C (trébol dextrógiro) y G son semejantes ya que estirando uno de los bucles de C obtenemos G; si colocamos un espejo entre los nudos C y D (trébol levógiro) obtendremos su semejanza. De manera análoga se puede probar que E (ocho dextrógiro) y F (ocho levógiro) son semejantes. Sin embargo, entre la pareja C-D y la pareja E-F hay una diferencia fundamental: mientras que es posible mover en el espacio el ocho dextrógiro hasta conseguir el ocho levógiro, no hay manera de



transformar mediante movimientos en el espacio un trébol en el otro, de hecho necesitamos un espejo para pasar del primero al segundo. Esto sucede porque en el espacio tridimensional es imposible transformar, moviéndola, una referencia dextrógira en una referencia levógira. Además, si dibujamos una flecha imaginaria en cada trébol; al enfrentar uno de ellos con el espejo veremos que, siendo las dos figuras iguales, las flechas apuntan en sentido opuesto. La teoría de nudos distingue esta propiedad definiendo la relación de “equivalencia” de nudos: *dos nudos serán equivalentes cuando la manipulación que transforme uno en el otro conserve la orientación que hayamos fijado previamente*. Así pues, los tréboles son semejantes pero no son equivalentes, al menos intuitivamente, y todos los nudos equivalentes son semejantes.

En todo caso, para demostrar que dos nudos son diferentes hay que descubrir, además, alguna propiedad que los distinga, sean cuales sean sus representaciones. Las propiedades de este tipo se llaman invariantes del nudo (grupo nodal, género del nudo, invariantes polinómicos, etc.) y, dada su complejidad, nos vemos obligados a excluirlas de nuestra exposición.

Clasificación de los nudos.

Los nudos pueden clasificarse atendiendo a varios criterios:

- Número de cruzamientos: el nudo trivial (figura 1, A) es el único nudo que no tiene ningún cruce. El nudo B de la figura 1 presenta dos cruzamientos, el siguiente tiene tres, etc. No hay relación alguna entre la semejanza de dos nudos y el número de cruzamientos que éstos tengan; por ejemplo, los nudos A y B de la figura 1 son claramente semejantes, pero no tienen el mismo número de cruces.
- Nudos primos y nudos compuestos: un nudo se llama primo cuando no podemos descomponerlo por manipulación en dos o más nudos separados; en caso contrario, se dice que el nudo es compuesto. La mayoría de las tablas de nudos existentes lo son de nudos primos. En la figura 1, el nudo H (nudo de rizados o gorupo) se compone de dos tréboles dextrógiros, el nudo llano (figura 1, I) está formado por un trébol levógiro y otro dextrógiro.
- Alternancia: un nudo es alternante cuando puede dibujarse de tal forma que al ir recorriendo la cuerda en cualquiera de sus dos sentidos, en los cruces se va pasando alternativamente por encima y por debajo. Todos los nudos primos de hasta siete cruzamientos son alternantes; con ocho cruces, únicamente existen tres nudos no alternantes.
- Nudos anfiquirales y no anfiquirales: los anfiquirales son aquellos nudos que mediante manipulación de la cuerda pueden convertirse en sus imágenes especulares. Por ejemplo, los nudos ocho E y F de la figura 1 son anfiquirales; el gorupo es un nudo anfiquiral, por ser la composición de dos tréboles de idéntica orientación.

Aspectos didácticos.

a) Ubicación.

Este tema estaba pensado originalmente para ser abordado desde el Taller de Matemáticas; pero, dada su potencialidad y su flexibilidad, puede ser tratado desde otras materias, como las optativas Matemáticas de la Vida Cotidiana (2º ESO), o Matemáticas de la Forma (2º Bachillerato, modalidad de Artes).

b) Objetivos.

1. Tomar conciencia de las relaciones existentes entre las Matemáticas y la artesanía popular.
2. Desarrollar la intuición espacial, reconociendo formas y haciendo conjeturas sobre las propiedades geométricas de los nudos.
3. Valorar la presencia y utilidad de los nudos en el mundo actual.

c) Materiales.

- Trozos de cuerda o cordel de distintas longitudes.
- Tijeras, pegamento, espejos.
- Cartulinas de varios colores.

d) Metodología.

El planteamiento metodológico ha de ser flexible y abierto, susceptible de ser adaptado a las características de los alumnos y del centro. Ello puede lograrse mediante la confección de fichas donde tengan cabida: una breve exposición teórica de los conceptos y propiedades pertinentes, una o dos actividades programadas para ser realizadas en grupos de tres o cuatro estudiantes y un último apartado en el que se recojan las conclusiones o resultados que hayan alcanzado los alumnos. Estas fichas se orientan a facilitar la adquisición de destrezas; a descubrir la geometría relacionada con la teoría de nudos, tanto en el ámbito artístico como en el artesanal y funcional. Los dibujos en el plano y la confección de diversos nudos constituyen el principal medio para el reconocimiento de formas, la descripción de éstas y el establecimiento de sus propiedades.

c) Algunas actividades programadas.

1. Confeccionar con cuerda todos los nudos primos con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cruzamientos. Presentación de los mismos en un mural realizado en equipo.
2. Realización de un panel para recoger dibujos, recortes de prensa o fotografías que presenten nudos.

3. Averiguar qué nudos de los confeccionados son anfigurales.
4. Dibujar un nudo llano con seis cruzamientos alternantes.
5. *El rompecabezas de nudo y anillo*: (figura 2) manipular nudo y anillo hasta que el anillo se traslade al nudo superior. Se supone que los extremos de la cuerda están fijos a la pared, y las manipulaciones permitidas son tensar o aflojar la cuerda. ¿Qué tipo de nudo compuesto es el del rompecabezas?
6. *El punto de cadeneta*: este punto, usado tradicionalmente en el ganchillo y bordado, se presta a un bonito juego de magia. Realizando los pasos de la figura 3, se obtiene una cadeneta más o menos larga; a continuación se pide a un espectador que apriete, entre índice y pulgar, un eslabón cualquiera de la misma. ¿Qué sucederá si se tira con fuerza de cada extremo de la cuerda?

Figura 2

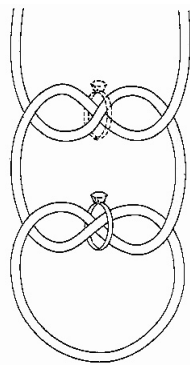
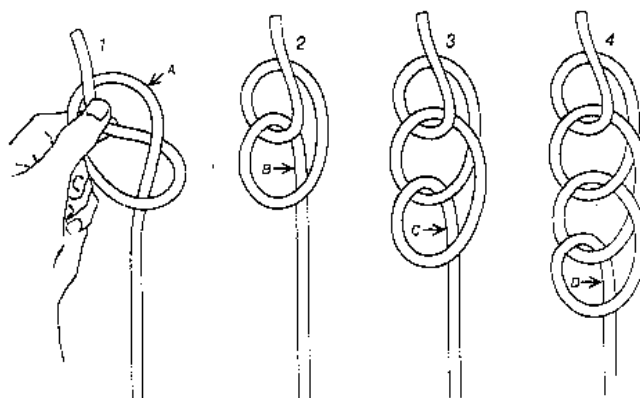


Figura 3



BIBLIOGRAFÍA

GARDNER, Martin.

Topología de nudos y los resultados de la Lotería Seductora. En *Investigación y Ciencia*, número 86, noviembre de 1983. Prensa Científica, Barcelona, 1983.

KOSNIOWSKI, Czes.

Topología algebraica. Editorial Reverté. Barcelona. 1986.

NEUWIRTH, Lee.

Teoría de nudos. En *Investigación y Ciencia*, agosto de 1979. Prensa Científica, Barcelona, 1979.