

EL DOMINIO DE LA VARIABLE: VARIABLE DIDÁCTICA EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR

Ligia Amparo Torres R.

Departamento De Didáctica De La Matemática

Universidad De Valencia

Plan De Nivelación Universitaria - Programa De Estudios Especiales

Universidad Del Valle

Santiago De Cali - Colombia

En el análisis del discurso matemático manifiesto en un texto de álgebra escolar, hemos encontrado que el *dominio de la variable* es un concepto presente desde la aparición de las expresiones generalizadoras de operaciones, relaciones y propiedades de los números reales, que tan sólo se explicita en el estudio del álgebra de las expresiones algebraicas. Este concepto, junto con el de *conjunto de referencia* de una expresión y con el de *conjunto solución*, juega un papel protagónico en diferentes contextos del álgebra escolar, que le permiten configurarse como una variable didáctica imprescindible en la significación de muchos otros conceptos algebraicos.

INTRODUCCIÓN

Las ideas contenidas en este documento tienen como referencia el análisis del discurso matemático presente en el texto guía¹ del curso de *Aritmética y funciones*². Este análisis considera categorías tales como: la caracterización de ese discurso —definicional, heurístico, formal—, los tipos de ejemplos y ejercicios propuestos —procedimentales, conceptuales, de comunicación, de razonamiento matemático, de resolución de problemas—, la estructura conceptual de las unidades temáticas, y los aspectos que se enfatizan de los contenidos.

Es precisamente en el análisis de esta última categoría donde reconocemos la importancia de explicitar, a partir de su definición y uso, el *dominio de la variable* como elemento primordial en la comprensión de conceptos fundamentales del álgebra escolar, tales como: variable, expresión algebraica, polinomio, ecuación, función, etc. A continuación, con el ánimo de justificar y argumentar tal importancia, estudiamos la aparición y el papel que juega el *dominio de la variable* en diferentes contextos algebraicos (el álgebra de los números reales y el álgebra de las expresiones algebraicas). Centramos la atención tanto en sus relaciones con los conceptos de *conjunto de referencia* y *conjunto solución*, como en su múltiple función en la solución de ecuaciones. Finalmente, concluimos con una serie de inquietudes que se convierten en objeto de estudio en torno a la problemática.

EL DOMINIO DE LA VARIABLE EN EL ÁLGEBRA ESCOLAR

En un curso de álgebra del bachillerato o de los primeros niveles de educación superior, generalmente, se abordan temas en relación con los números reales, las expresiones algebraicas y las funciones. En cada una de estas temáticas se definen los elementos (números reales, expresiones algebraicas, funciones), las operaciones entre estos elementos (adición, sustracción, producto, cociente, potenciación, radicación, valor absoluto, composición), y se establecen relaciones (de equivalencia y de orden). Desde esta perspectiva consideramos que lo realizado en estos cursos es álgebra de los números reales, álgebra de las expresiones algebraicas y álgebra de las funciones.

El dominio de la variable en el álgebra de los números reales

En el álgebra de los números reales se usan expresiones que son generalizaciones numéricas de operaciones, relaciones y propiedades. Estas expresiones se configuran mediante literales, que junto con los signos de las operaciones y los signos de agrupación permiten enunciar y explicar en forma breve y precisa las definiciones de operaciones o relaciones y sus propiedades.

Entre las tareas más comunes que debe realizar el estudiante con estas expresiones están aquellas en las cuales es necesario evidenciar el valor o valores de la letra, o hallar el valor algebraico de una expresión; otras, donde se debe transformar la expresión en una más simple, o con determinada característica. Corresponden a este orden de tareas los siguientes ejemplos, seleccionados de los ejercicios propuestos en los capítulos que versan sobre números reales, del texto guía:

¹ Zill, Dennis G. y Dewar Jaqueline M. *Álgebra y trigonometría*. McGraw-Hill. 1992

² Cursos que se desarrollan en el Plan de Nivelación Universitaria de la Universidad del Valle con estudiantes que han terminado su bachillerato y no han logrado ingresar a la universidad. Cursos equivalentes a un curso de álgebra elemental.

1. ¿Para qué valores de a , $a-5$ es un número real?
2. ¿Para qué valores de x , $\sqrt{x}$ es real?
3. ¿Si a pertenece a los números reales, qué valor tiene a^2+1 ?
4. Simplificar: $\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$; $\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4}$
5. ¿Para qué valores de a , $\frac{5}{a}$ es positivo?
6. ¿Para qué valores de x , la expresión $\frac{x^2}{x}$, es negativa?
7. ¿Para qué valores de x , es verdad que $x \leq |x|$?
8. ¿En qué condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad triangular, es decir, cuándo es verdad que $|a+b| = |a| + |b|$?

Inicialmente, asumamos como objeto de estudio la situación planteada en el primer ejemplo: ¿Para qué valores de a , $a-5$ es un número real?

Para que $a-5$ represente un número real debemos tener en cuenta **los valores posibles de a** ; estos valores posibles de a constituyen el *conjunto de referencia* de la expresión. Por la manera como está formulada la pregunta, podemos suponer que el *conjunto de referencia* son los reales, y por tanto, respondemos que para cualquier valor real que tome a , $a-5$ toma valor real. Sin embargo, también podemos suponer otro *conjunto de referencia* distinto de los reales, por ejemplo, los naturales o los complejos; en el primer caso, la respuesta es que a puede tomar cualquier valor natural para que $a-5$ sea real; en el segundo, los valores de a que hacen que $a-5$ represente un número real son los $a = x + yi$, donde $y = 0$. En general, si tomamos como *conjunto de referencia* un subconjunto de los reales, todos sus elementos se constituyen en respuesta.

Haciendo un análisis similar al anterior, para la pregunta del segundo ejemplo (¿Para qué valores de x , $\sqrt{x}$ es real?) inferimos que los valores de x que hacen que $\sqrt{x}$ sea real dependen también del *conjunto de referencia* que tomemos. Si x es real, los valores son los reales no negativos, es decir, $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$; si x es entero, los valores son los enteros no negativos, $\{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$. Además, si $x \in \mathbb{C}$, $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = a + bi$ donde $a \geq 0 \wedge b = 0$.

Hasta este momento, es evidente que de acuerdo con los *conjuntos de referencia* que se asuman las preguntas tienen distintas respuesta.

Notemos que para responder cada pregunta es necesario considerar dos conjuntos:

- el *conjunto de referencia*, o conjunto de cuyos elementos se nutre la variable, aquel al cual pertenece la variable, y,
- el **dominio de la variable**, subconjunto del *conjunto de referencia*, constituido por los elementos que permiten que la expresión represente un elemento del mismo, es decir, que la expresión *tenga sentido* en el conjunto donde ella se define.

Por tanto, la característica de los conjuntos que sirven de respuesta a las preguntas planteadas es que cada uno de ellos constituye el *dominio de la variable* de la expresión en cuestión.

Así pues, en la pregunta del ejemplo 3 (¿Si a pertenece a los números reales, qué valor tiene a^2+1 ?), es explícito el *conjunto de referencia* y se corresponde con el *dominio de la variable* de la expresión. Bajo estas condiciones fácilmente damos respuesta a la pregunta, ya que, si $a \geq 0$ entonces $a^2+1 > 0$, y si $a < 0$ entonces $a^2+1 > 0$. Así, a^2+1 siempre va a ser positiva para cualquier a que pertenece a los reales.

Ahora, en aras de ratificar la importancia de precisar un conjunto de valores permisibles para las variables en cada expresión, asumamos como objeto de estudio las situaciones planteadas en el ejemplo 4 (Simplificar $\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5}$;

$\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4}$). Para ello observemos sus soluciones típicas:

$$\frac{(-6xy^2)^3}{x^2y^5} = \frac{(-6)^3 x^3 (y^2)^3}{x^2y^5} = -\frac{216x^3y^6}{x^2y^5} = -216x^{3-2}y^{6-5} = -216xy$$

$$\sqrt[4]{16x^5} \cdot \sqrt[4]{2x^3y^4} = \sqrt[4]{16 \cdot 2 \cdot x^8y^4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{x^8} \cdot \sqrt[4]{y^4} = 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot x^2|y|$$

Notemos que el proceso de simplificar se realiza con base en la aplicación de las propiedades de los números reales, las cuales le dan validez a cada paso del proceso. Por ello, para cada expresión implicada en el proceso es necesario preguntarse ¿para qué valores reales de los literales la expresión tiene sentido?, es decir, ¿para qué valores de los literales la expresión representa un número real?

De esta manera, en la primera situación, el proceso de simplificación llevado a cabo en los tres primeros pasos es válido sólo si $x \neq 0$ y $y \neq 0$. En la segunda situación, el literal x no puede ser negativo, ya que no sería válido el primer paso de la simplificación.

El dominio de la variable en el álgebra de las expresiones algebraicas

En este punto es ya claro que en el álgebra de los números reales emerge la necesidad de la determinación, en primer lugar, de un *conjunto de referencia* y, en segundo lugar, del *dominio de la variable*. Pero solamente, es en el álgebra de las expresiones algebraicas cuando aparece por primera vez, en los textos, una definición de *dominio de la variable* de una expresión algebraica.

Veamos una muestra de lo afirmado, tomada del texto guía (el resaltado es nuestro):

“Ya hemos encontrado conveniente usar letras tales como x o y para representar números; cada símbolo se llama variable. Una expresión algebraica es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o raíces en un grupo de variables y números reales. Los siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - p, \quad \frac{4xy - x}{x + y}, \quad \sqrt[3]{\frac{7x-3}{x^5 y^{-2} + z}}$$

A veces una expresión algebraica representa un número real solamente para ciertos valores de una variable. Al considerar la expresión $\sqrt{x}$, encontramos que debemos tener $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ represente un número real. Cuando trabajamos con expresiones algebraicas, suponemos que las variables son restringidas **para que la expresión represente un número real**. El conjunto de valores permisibles para la variable se llama el **dominio de la variable**. Así, el dominio de la variable en $\sqrt{x}$ es el conjunto de todos los números reales no negativos $\{x|x \geq 0\}$, y para $\frac{3}{(x+1)}$ el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = -1$; es decir, $\{x|x \neq -1\}$.”

Si bien, en el álgebra de las expresiones algebraicas, por una parte se asume como *conjunto de referencia* explícito al conjunto de los números reales, y por otra, se maneja una definición del *dominio de la variable*, es preciso hacer algunas consideraciones adicionales:

- En la definición de expresiones algebraicas, particularmente de los polinomios, se hace necesario diferenciar los campos de variación de las letras que intervienen en su conformación. Los dominios de variación de los coeficientes a_i , de las variables X, Y, Z y de los exponentes de éstas (representados por n), son diferentes, y todos ellos intervienen en la decisión de cuándo una expresión representa un real.
- En las operaciones con las expresiones algebraicas y/o con los polinomios surgen, a través de las fórmulas de factorización y los productos notables, interrogantes que tienen que ver con el uso de las variables escritas en mayúscula en estas fórmulas. Al respecto, se asumen dichas fórmulas como verdaderos modelos algebraicos, donde las variables, escritas en mayúscula, representan expresiones algebraicas.

El conjunto solución en el álgebra de los números reales

Retomemos ahora las preguntas de los ejemplos 5, 6, 7 y 8. Destacamos que para dar respuesta a cada una de estas preguntas, además de pensar en el *conjunto de referencia* —el cual asumimos como los números reales— y en el *dominio de la variable* de cada expresión, hay que determinar un subconjunto del dominio de la variable que permita, respectivamente, que:

$\frac{5}{a}$ tome valores reales positivos; $\frac{x^2}{x}$ tome valores reales negativos; X sea menor o igual a $|x|$; y, $|a+b|$ tome los mismos valores de $|a|+|b|$. En otras palabras, hay que *encontrar* un conjunto cuyos elementos satisfagan la relación (de equivalencia o de orden), es decir, el *conjunto solución* de la relación.

Podría pensarse que para dar respuesta a la pregunta 8, lo que se ha hecho es encontrar las soluciones de la ecuación $|a+b|=|a|+|b|$, es decir, los elementos a y b de R para los cuales las dos expresiones representan el mismo valor. En forma análoga, podría pensarse que en las preguntas 5, 6 y 7 se han solucionado respectivamente las inecuaciones $\frac{5}{a} > 0$, $\frac{x^2}{x} < 0$ y $x \leq |x|$. No obstante, debemos aclarar que estas preguntas aparecen en el contexto del álgebra de los números reales, y no en el álgebra de las expresiones algebraicas —que habitualmente aparece con posterioridad como objeto de estudio—; lo anterior nos permite afirmar que desde el álgebra de los números reales se están considerando implícitamente tanto los conceptos de *conjunto de referencia* y *dominio de la variable*, como el concepto de *conjunto solución*.

Queremos enfatizar que, en el álgebra escolar, la aparición explícita del concepto *conjunto solución*, sólo se hace cuando se aborda el estudio de las ecuaciones, es decir cuando se define una relación de equivalencia entre dos expresiones algebraicas particulares. Los primeros párrafos de la sección 2.1 *Ecuaciones, identidades y ecuaciones lineales* ejemplifican la anterior afirmación:

“Una ecuación es una afirmación de que dos expresiones son iguales, mientras que una inecuación plantea que una expresión es menor que otra. Una amplia gama de problemas de la vida real puede expresarse como ecuación, o como inecuación. Comenzamos esta sección con cierta terminología que describe las ecuaciones y sus soluciones.

Cuando dos expresiones se igualan, se obtiene una **ecuación**. Por ejemplo,

$$\sqrt{x+1}=2, \quad x^2-1=(x+1)(x-1), \quad \text{y} \quad |x+1|=5$$

son ecuaciones con la variable x .

Una solución, o **raíz**, de una ecuación es cualquier número que, sustituido en la ecuación, la convierte en una proposición verdadera. Se dice que un número *satisface la ecuación* si es una solución de la ecuación. *Resolver una ecuación* significa encontrar sus soluciones.”

“Una ecuación se llama **identidad** si todos los números del dominio de la variable la satisfacen. Si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, entonces se dice que es una **ecuación condicional**.”

El dominio de la variable en la solución de ecuaciones

Ahora bien, al estudiar la anterior introducción de las ecuaciones lineales, y prosiguiendo con nuestras indagaciones en torno al *dominio de la variable*, aparecen nuevos interrogantes:

- En la perspectiva de diferenciar una ecuación condicional de una identidad, nos preguntamos ¿cuál es el dominio de la variable de una ecuación?
- Con relación al proceso de búsqueda de las soluciones, donde se transforma una ecuación dada en una que tiene el mismo conjunto solución de la inicial, emergen preguntas como ¿cuál es la relación entre dominio de la variable y la solución de una ecuación?, ¿cómo interviene el dominio de la variable en el proceso de solución de una ecuación?, o, ¿cuándo dos ecuaciones son equivalentes?

Estos cuestionamientos regularmente no encuentran respuesta directa en los textos escolares; no obstante, el análisis de los implícitos de ese discurso matemático nos permite plantear algunas respuestas. Para ello, trataremos algunas situaciones particulares extraídas del texto guía.

a. El dominio de la variable de una ecuación

Consideremos la siguiente ecuación de variable real $x-5=\sqrt{x+7}$ y a través de ésta transitamos hacia la respuesta a la pregunta general ¿cuál es el dominio de la variable en una ecuación?

Inicialmente, optemos por aplicar la definición de dominio de la variable de una expresión algebraica al caso de una ecuación; esto es, el dominio de la variable de una ecuación es el conjunto de valores permisibles para que la ecuación *tenga sentido*.

Ahora supongamos que 2 es un elemento del dominio de la variable de la ecuación $x-5=\sqrt{x+7}$; así al evaluar las expresiones implicadas obtenemos: $2-5=\sqrt{2+7}$, luego $-3=\sqrt{9}$, y así $-3=3$. ¿Indica este absurdo que cuando $x=2$, la ecuación *no tiene sentido* y que por tanto, 2 no pertenece al dominio de la variable de la ecuación?

Recordemos que una expresión algebraica tiene sentido si representa un elemento del conjunto de referencia, pero en la ecuación tenemos dos expresiones. Encontremos el dominio de la variable de cada una de ellas. Los valores permisibles para que $x-5$ represente un número real conforman el conjunto R , mientras que los reales mayores o iguales que -7 configuran el dominio de la variable de $\sqrt{x+7}$. Nos preguntamos entonces: ¿cuál es el dominio de variable en la ecuación, $\{x \in R\}$ ó $\{x \in R \mid x \geq -7\}$? Para tomar tal decisión es menester tener en cuenta que las expresiones de la ecuación intervienen a la par, por lo tanto, el dominio de la variable de la ecuación son los valores permisibles para que cada una de las expresiones comparadas mediante la relación de equivalencia representen simultáneamente elementos del conjunto de referencia (R). Tenemos entonces: $\{x \in R\} \cap \{x \in R \mid x \geq -7\} = \{x \in R \mid x \geq -7\}$ como dominio de la variable de la ecuación en mención y entonces 2 es un elemento del dominio de la variable de la ecuación.

Concluimos respecto de esta indagación que el *dominio de la variable de una ecuación* es el conjunto intersección de los dominios de las dos expresiones que intervienen en la comparación.

b. El papel del dominio de la variable en el proceso de solución de una ecuación

Abordemos ahora la pregunta ¿es la ecuación $x-5=\sqrt{x+7}$ una identidad o una ecuación condicional? Para responderla aparece la necesidad de encontrar el *conjunto solución* (S) de la ecuación y **compararlo** con el *dominio de la variable* (D_x), ya que, la ecuación es identidad si todos los números del dominio de la variable la satisfacen ($S=D_x$), pero si hay por lo menos un número en el dominio de la variable que no satisfaga la ecuación, es una ecuación condicional ($S \neq D_x$).

Veamos que este último caso es el de nuestro ejemplo. Para ello, solucionemos la ecuación $x-5=\sqrt{x+7}$ (donde $x \geq -7$). Elevando al cuadrado ambas expresiones tenemos $x^2 - 10x + 25 = x + 7$ (donde $x \in R$), de donde $x^2 - 11x + 18 = 0$. Factorizando se sigue que $(x-9)(x-2)=0$ (donde $x \in R$). Se concluye así que 9 y 2 son soluciones de la última ecuación. Si sustituimos x por 9 en la ecuación original encontramos $9-5=\sqrt{9+7}$, entonces, 9 es una solución de dicha ecuación. Pero si sustituimos x por 2 en la ecuación original encontramos $2-5 \neq \sqrt{2+7}$, luego 2 no es solución de $x-5=\sqrt{x+7}$.

La primera observación que salta a la vista es que el conjunto solución y el dominio de la variable de la ecuación no coinciden, son conjuntos diferentes $\{x \in R \mid x=9\} \neq \{x \in R \mid x \geq -7\}$, y en consecuencia $x-5=\sqrt{x+7}$ es una ecuación condicional. Sin embargo, el conjunto solución de la ecuación es subconjunto del dominio de la variable de la ecuación. En nuestro caso $\{x \in R \mid x=9\} \subset \{x \in R \mid x \geq -7\}$.

Una segunda observación es que en el proceso de solución emergen ecuaciones que no tienen el mismo dominio que el de la ecuación original. Esto se da porque los dos lados de la ecuación se han multiplicado por una expresión que contiene una variable, y en consecuencia, la ecuación resultante puede no tener las mismas soluciones de la ecuación original. Esta aserción se encuentra ejemplificada en la solución de la ecuación que nos ocupa y en el hecho que 2 y 9 son elementos del dominio de la variable de la ecuación original, pero 2 no es solución de la misma. Se afirma entonces que 2 es una *solución externa* de la ecuación original, ya que se ha ganado en el proceso de transformación de ésta.

Con respecto a las soluciones externas, es necesario señalar que, aunque también emergen en el proceso de transformación al multiplicar por una expresión que contiene una variable, algunas no siempre pertenecen al dominio de la variable de la ecuación original. Por ejemplo, si consideramos la ecuación $2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, (donde $x \neq -1$) y su proceso de solución³, observamos que la solución externa -1 ni es solución de la ecuación original, ni tampoco pertenece al dominio de ésta.

³ Multiplicando los dos lados de la ecuación $2 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, (donde $x \neq -1$), por $x+1$ se produce la ecuación lineal $2x + 2 - 1 = x$, y a partir de ésta se obtiene la ecuación $x = -1$, cuya solución evidentemente es el real -1 .

Una tercera y última observación, que depende de la segunda, es que las ecuaciones $x - 5 = \sqrt{x + 7}$ y $x^2 - 11x + 18 = 0$ no son equivalentes, pues, tienen diferentes dominios y distintas soluciones.

INQUIETUDES Y COMENTARIOS

En el proceso de análisis del discurso matemático, que ha evidenciado el dominio de la variable como variable didáctica, hemos podido identificar aspectos que también son objeto de reflexión ya que muestran rasgos que los revelan como potenciales variables didácticas. Éstos son:

- En el álgebra de los números reales se usan indiscriminadamente las primeras o últimas letras del alfabeto en las expresiones que generalizan operaciones, relaciones o propiedades de estos; como éstas representan específicamente números reales, no es necesario establecer distinción alguna. Sin embargo, en el álgebra de las expresiones algebraicas y de las funciones, se hace necesario establecer esta diferencia explícitamente; allí, las primeras letras del alfabeto representan parámetros y constantes, y las últimas, variables. El no advertir la aparición de estos cambios semánticos, se perfila como una posible causa del manejo y comprensión del lenguaje algebraico en su aspecto eminentemente sintáctico.
- Los símbolos algebraicos son un recurso que permite, entre otras habilidades, denotar y manipular abstracciones; el reconocimiento de su naturaleza y su significado en el contexto de la matemática escolar se hace necesario para comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados.
- En el álgebra de las funciones, donde es ineludible el concepto de dominio de la función, se manifiestan algunos interrogantes importantes ligados al concepto de dominio de la variable; por ejemplo, ¿cuál es la relación entre dominio de la variable y dominio de la función?, ¿qué papel juega el dominio de cada función en la determinación del resultado de operar funciones?, ¿cuál es la relación entre dominio de una función y el rango de su respectiva función inversa?

BIBLIOGRAFÍA

- KIERAN, C. y FILLOY YAGUE, E. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias. 1989. Vol. 7(3). 229-240.
- ROJANO, Teresa. El álgebra en el currículum de la secundaria. La reforma de los 90's. Educación matemática. vol. 3, No 3. Dbre. 1991. 4-8.
- ENFEDAQUE, Jesús. De los números a las letras. Suma 5. 1990. 23-31.
- GRUPO AZARQUIEL. El simbolismo algebraico o por qué los profesores nos empeñamos en complicar tanto la vida de nuestros alumnos?. 1991.
- GALLARDO, Aurora y ROJANO, Teresa. Areas de dificultad en la adquisición del lenguaje aritmético - algebraico. Recherches en didactique des mathématiques. vol. 9. No. 2. 1988. 155-188.
- ACEVEDO CAICEDO, Myriam. Como incorporar enriquecedoramente las estructuras algebraicas. Universidad nacional de Colombia.
- COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Propuesta de programa curricular para matemáticas. Marco general. Octavo grado de educación básica. Bogotá. 1990.
- ROMERO CRUZ, Jaime Humberto. La variable como problema puntual. Búsqueda de causas en octavo grado. Proyecto de investigación. Bogotá. 1993.
- GOMEZ, Pedro y MESA, Vilma María. ¿Qué significa "saber" álgebra?. Una empresa docente. Universidad de los andes. Bogotá.
- LABORDE, Colette. Language and mathematics. Mathematics and cognition. 1990. 53-69.
- FREESHER FELDMAN, Carol. El pensamiento a partir del lenguaje, la representación lingüística de las representaciones cognitivas.
- TIMSS. TERCER ESTUDIO INTERNACIONAL DE MATEMATICAS Y CIENCIAS DE LA IEA. Manual de análisis de curriculum. 1993.
- BROUSSEAU, Guy. Fundements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 7. No 2. 1986. 33-115.
- EL BOUAZZAOUI, H. (1988) *L'étude des conceptions de la notion de continuité dans fonction chez les élèves et les professeurs de la fin du secondaire au maroc* (Tesis doctoral). Québec: Universidad Laval.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). (1991). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Edición en Castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales".
- ZILL, D. & Dewar, J. (1995). *Álgebra y Trigonometría*. Editorial McGraw Hill.