

GEOMETRIA MANIPULATIVA A PARTIR DE LAS TRANSFORMACIONES

Àngel Alsina Pastells
 Roser Castelló Burgués
 Pere Díaz Laguarda
 Miquel Mallen Heras
 María Ortensi Cusí
 Esperança Roca Romero
 Grupo “Perímetre” de Girona.
 Coordinadora: M^a Antònia Canals Tolosa.

Introducción

Somos un grupo de maestros que nos reunimos periódicamente para intentar mejorar la enseñanza de las Matemáticas en nuestras escuelas, y concretamente nos preocupa la Geometría, que creemos que es quizás el aspecto menos cuidado. Por ello, deseamos presentar unas experiencias en este terreno que, en todos los casos, hemos experimentado en el aula. Creemos que todas las nociones expuestas pueden y deben trabajarse en todos los cursos de Primaria de forma cíclica, es decir, nada debe darse por sabido de una forma definitiva en un determinado nivel.

En relación a la metodología, creemos que es bueno plantear todas las nociones primero con actividades basadas en los propios movimientos, especialmente desplazamientos; y después en actividades manipulativas. Posteriormente, pueden representarse de forma plástica las relaciones espaciales ya previamente interiorizadas, y, si se trabaja con lápiz y papel, debe ser después de este proceso.

Presentamos aquí una muestra de actividades de geometría plana (taller 1) y del espacio (taller 2) a partir de los dos primeros tipos de actividades de aprendizaje geométrico mencionados: movimiento y manipulación. Para la expresión plástica proponemos que los alumnos dibujen libremente lo que han hecho y lo que han visto, en un papel en blanco. Este ejercicio presenta grandes posibilidades para ellos, y para nosotros es el mejor control.

En todo caso queremos huir de la Geometría clásicamente presentada a partir de imágenes y nombres de figuras a memorizar. Queremos tomar como punto de partida las vivencias de nuestros alumnos, la experimentación y el diálogo que fomenta la reflexión propia del pensamiento matemático. Quizás así podremos conseguir en nuestras aulas una Geometría más dinámica, adecuada a las necesidades de un aprendizaje real y significativo del espacio, y capaz de entusiasmar a nuestros niños y niñas de Primaria. Nuestro mayor deseo es que tanto ellos como nosotros seamos felices en clase de Geometría.

Contenidos procedimentales

- Dominio de los propios movimientos al desplazarse.
- Construcción de modelos con materiales sencillos. Uso correcto de instrumentos.
- Comparación y relación entre figuras y cuerpos por su forma y su posición en el espacio.
- Observación de parecidos y diferencias.
- Clasificación, de manera práctica y vivencial, de figuras planas y de cuerpos tridimensionales a partir de los criterios conocidos y a partir de otros criterios nuevos.
- Relación entre un cuerpo tridimensional y las figuras bidimensionales de sus proyecciones y secciones.
- Expresión verbal de las acciones realizadas y de las propiedades descubiertas.
- Dominio del vocabulario geométrico específico.
- Exploración del fenómeno de la transformación como cambio.
- Elaboración de tablas de las familias obtenidas a partir de las transformaciones hechas.
- Interiorización de las propiedades y relaciones observadas.
- Práctica de “investigar”, descubrir y generalizar.

TALLER I. CLASIFICACIONES, SOMBRAS Y SIMETRÍAS DE FIGURAS BIDIMENSIONALES

Contenidos conceptuales

- Línea recta y línea curva. Líneas poligonales.
- Polígonos. Vértices, lados y diagonales. Ángulos exteriores e interiores.
- Primera noción de ángulo, relacionada con la acción de girar.
- Simetría en el plano: eje de simetría, figura inicial y figura final.

- Figuras planas con simetría y figuras sin ella, en nuestro entorno inmediato.
- Cuadriláteros. Paralelogramos.
- Polígonos convexos y cóncavos.
- Ejes de simetría de algunos polígonos especiales. Polígonos regulares.
- Ejes de simetría de algunas figuras no poligonales, y particularmente del círculo.

Primeras nociones. Polígonos

Actividades de desplazamientos

1º y 2º Ciclo

Material: Cintas adhesivas de distintos colores. Tiza.

Tenemos dibujadas en el suelo, con cinta adhesiva, cuatro líneas: una recta, una curva una poligonal abierta y una poligonal cerrada. Se indica con un punto el inicio del recorrido, y con una flecha el sentido del mismo.

- Los alumnos las recorren observando la posición de su propio cuerpo al caminar (rígido en las líneas rectas y girando lentamente en las curvas). Así se fijan en los cambios de dirección (nulo en la recta, continuado en la curva y bruscos en las poligonales).
- En cada vértice han de decir si giran hacia la derecha o hacia la izquierda. En el suelo dibujamos con tiza la prolongación del segmento recto recorrido, el cual con el segmento siguiente forma el ángulo girado. También dibujan una flecha para indicar el sentido del giro realizado.
- Recorrer caminando el contorno de dos polígonos de gran tamaño, uno cóncavo y otro convexo, (aunque todavía no conocen esos nombres), observando en cada caso cual es el sentido del giro realizado en cada vértice. La comparación de los dos casos permite distinguir los dos tipos de polígono de manera práctica y vivenciada. Es una primera clasificación.
- Se coloca un niño o una niña de pie justo encima de un vértice de uno de los polígonos anteriores, y se le pide que se desplace hasta otro vértice en línea recta, de manera que su camino sea una de las diagonales del polígono; le pide que del mismo modo realice todas las posibles. Según sea la posición de las diagonales (todas en la región interior, o alguna pasando por la región exterior), aparece otro criterio para clasificar los polígonos en dos tipos: convexos y cóncavos.
- Como actividad complementaria, en los cursos superiores, puede practicarse la medida de los ángulos exteriores de los polígonos (los que hemos girado), y comprobar, pasándolos a cartulina o a papel vegetal, que entre todos juntos suman 360° , sea cual sea el polígono con que trabajamos.

Actividades manipulativas

1º y 2º Ciclo

Material: lanas, cuerdas, geoplano, gomas elásticas, cartulinas.

- Invitamos a los niños a representar los distintos tipos de líneas y de figuras realizadas previamente con movimiento, con cuerdas en el suelo o con lanas de colores sobre la mesa.
- Representar líneas poligonales abiertas y cerradas en un geoplano con gomas elásticas. En el último caso, hacer todas las diagonales con lanas.

c) Clasificaciones de polígonos:

c.1) - Clasificación de figuras en: polígonos-no polígonos.

Observación de distintas figuras: algunas con todos los lados rectos y otras con algunos lados no rectos o bien formadas por una sola línea curva. Deben distinguirse las figuras con todos los lados rectos (polígonos) de las que no tienen todos los lados rectos (no polígonos).

c.2) - Clasificaciones de polígonos según los lados:

. Actividad 2a. Según el número de lados.

Observación de distintos polígonos. Se pide a los niños que coloquen por filas los polígonos según el número de lados: 3 lados, 4 lados, etc. Se puede observar que no existen polígonos de 2 lados, que se puede trazar un polígono de muchos lados, etc.

. Actividad 2b. Según la longitud de los lados: equiláteros-no equiláteros.

Para realizar esta actividad podemos partir de la clasificación realizada en la actividad anterior: se pide que observen la fila de polígonos de 3 lados, y que clasifiquen las figuras según si los lados son de la misma o de distinta longitud. A continuación realizamos el mismo proceso con los polígonos de 4 lados, de 5 lados, etc.

c.3) - Clasificaciones de polígonos según los vértices:

. Actividad 3a. Según el número de vértices.

Se realiza de forma idéntica a la actividad 2a, variando el criterio: en lugar de clasificar según el número de lados lo haremos a partir del número de vértices de cada polígono.

. Actividad 3b. Según los ángulos interiores de los vértices (cóncavos o convexos).

Se observan los ángulos interiores de distintos polígonos: si dichos ángulos son menores de 180° el polígono es convexo y si el ángulo interior es mayor de 180° es cóncavo.

c.4) - Clasificación de polígonos según las diagonales.

. Actividad 4a. Según el número de diagonales.

Realización de todas las diagonales posibles de cada polígono y clasificación en base a la cantidad de diagonales. Se pueden observar aspectos importantes: no existen figuras con una sola diagonal; para que un polígono tenga diagonales debe tener como mínimo 4 lados; etc.

. Actividad 4b. Según la longitud de las diagonales.

Realización y medida de las diagonales, centrándonos en su longitud. Esta clasificación es parecida a la realizada según la longitud de los lados (actividad 2b) y, por lo tanto, pueden establecerse algunas comparaciones o relaciones interesantes.

c.5) - Clasificación de polígonos en: regulares-no regulares.

Una vez se han realizado las distintas clasificaciones anteriores (según los lados, los vértices y las diagonales), se puede proceder a la observación y distinción de polígonos según tengan los lados, los ángulos y las diagonales iguales (regulares) o no (irregulares). Debe tenerse en cuenta que existe un único polígono regular que no tiene diagonales (triángulo equilátero).

c.6) - Clasificación de los cuadriláteros.

. Actividad 6a. Según los lados.

Observación de los lados de distintos cuadriláteros, y distinción según si todos son iguales (equiláteros); iguales dos a dos (paralelogramos) o todos distintos.

. Actividad 6b. Según los ángulos.

Observación de los ángulos: iguales; iguales dos a dos o diferentes.

. Actividad 6c. Según las diagonales.

Realización y observación de las diagonales: de la misma longitud o no.

. Actividad 6d. Según la perpendicularidad de las diagonales.

Realización y observación de las diagonales: perpendiculares entre ellas o no.

En todas las actividades de clasificación planteadas podemos utilizar como soporte un mural dónde van pegándose las figuras con masilla adhesiva en el lugar correspondiente según el criterio utilizado para realizar la clasificación.

Pueden aprovecharse algunas actividades de sombras, de simetrías y de plegado de papel explicadas en este mismo taller para realizar clasificaciones desde otra perspectiva y/o establecer relaciones. Además, siempre podemos potenciar que los niños busquen otras formas o criterios de clasificar los polígonos.

Simetrías

Actividades manipulativas

1º, 2º y 3º Ciclo

Material: Hojas de árbol naturales, pétalos grandes, flores secas, papeles para plegar, figuras planas de cartulina, dibujos varios, geoplano, gomas elásticas, cartulinas en que se representan los puntos del geoplano, espejos planos, cañas de beber, tangram u otras piezas similares.

. Con espejos:

a) - A partir de figuras planas simétricas de nuestro entorno (hojas,...) que tenemos sobre la mesa, poner encima el espejo perpendicularmente, buscando la posición en la que se vea la figura entera. Repetimos la misma experiencia con figuras preparadas en cartulina (se trata de ver que en unos casos es posible y en otros no). Primero practican la estimación (intentan adivinar) y después lo comprueban con el espejo.

b) - Dado el dibujo de la mitad de una figura con simetría, y el eje, dibujar la parte que falta. Otra forma: en papel cuadriculado se da a los niños un dibujo (con un solo eje de simetría) como modelo, junto con otra cuadrícula en blanco y con el eje señalado, pidiéndoles que dibujen sólo la parte necesaria (una mitad) para que al poner un espejo en la recta aparezca la figura entera.

c) - En una cartulina hemos trazado dos perpendiculares que la dividen en 4 cuadrantes. Preparamos dibujos en los cuatro, de manera que el total sea simétrico o no lo sea respecto de cada una de las rectas. Con estimación primero, y después con el espejo, los alumnos han de descubrir qué rectas son ejes de simetría (las dos, una o ninguna).

d) - Construir una figura con gomas en el geoplano, marcar un eje de simetría con otra goma, y construir la figura simétrica. Reproducir en el papel pautado lo que se ha hecho en el geoplano. Después, comprobarlo con el espejo.

- e) - Con dos espejos verticales, unidos por detrás con cinta adhesiva formando ángulo, se observan composiciones de dibujos. Con estimación previa, ver los que pueden reproducirse y los que no.
- f) - Con los mismos espejos, un pedazo de cañita o un listón, variar el ángulo de los espejos y obtener polígonos regulares. Analizar si pueden salir polígonos irregulares y por qué. Ver la relación entre el número de lados y el ángulo de los espejos. Llegar a imaginar el círculo como caso límite.

. Con plegado de papel:

- a) - En un papel se dibuja una figura y un eje de simetría en una posición cualquiera. Doblando el papel por el eje, obtener la figura simétrica. Lo mismo cambiando la posición del eje (que corte la figura., etc...). Dada la figura final y el eje, encontrar la inicial. Dadas las dos, encontrar el eje.
- b) - Dadas distintas figuras en papel, encontrar los posibles ejes de simetría por doblado.
- c) - Plegar el papel en cuatro (por dos rectas perpendiculares), dibujar un segmento que corte los dos lados, y cortando por él, obtener cuadriláteros. Analizar el tipo de cuadrilátero obtenido en función de la inclinación de la recta por la que hemos cortado.
- d) - Buscar qué sucede con otro plegado inicial, según la amplitud del ángulo, así como la condición para que sea polígono regular (60° para obtener un hexágono regular).
- e) - Con los dos espejos de la actividad f) del apartado anterior, poner distintas piezas del tangram adosadas a los espejos. Perfilar la parte opuesta sobre un papel de base, doblar éste y recortar. Analizar el polígono obtenido. Variando las piezas y el ángulo, observar las figuras que se forman.

TALLER I I SIMETRÍAS, SECCIONES Y PROYECCIONES DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES

Contenidos conceptuales

- Simetría en el espacio: plano de simetría, figura inicial y figura final.
- Cuerpos con simetría y cuerpos sin ella.
- Planos de simetría (uno o varios) de un cuerpo u objeto de uso corriente.
- Poliedros. Vértices, aristas, caras laterales y bases.
- Algunos poliedros en especial. Prismas y pirámides regulares.
- Cuerpos redondos y otros cuerpos no poliédricos.
- Planos de simetría de algunos poliedros especiales (base regular) y de los cuerpos redondos.

Simetrías

Actividades de desplazamientos

1º Ciclo

Material: espejo grande o 4 listones de madera para formar un supuesto marco de espejo.

- a) - Un niño con una flor en la mano derecha se coloca delante del espejo. Levanta esa mano y observa lo que hace su imagen. Expresa verbalmente lo que hizo él y lo que hizo su imagen.
- b) - Repetir la actividad anterior substituyendo el espejo por un marco de madera que lo representa y por tanto indica la situación del plano de simetría. Se sitúa una niña delante del espejo imaginario y adopta con su cuerpo la posición que quiera. Otra niña o niño ha de colocarse en el lugar y posición que tendría la imagen si el espejo fuese real.
- c) - Dos niños o niñas se sitúan en una posición simétrica respecto del espejo (quizás con ayuda nuestra), y un tercer niño ha de colocar el marco (el espejo), en el lugar que le corresponde.
- d) - Descubrir que nuestro cuerpo es aproximadamente simétrico respecto de un plano.

Actividades manipulativas

1º, 2º y 3º Ciclo

- a) - Como la actividad c) del apartado anterior pero colocando dos objetos.
- b) - Damos a los alumnos una mitad de un cuerpo, lo colocan apoyado en el espejo y descubren como han de construir la otra mitad para que resulte un cuerpo entero que tenga simetría.
- c) - Construir con arcilla un cuerpo de forma cualquiera, cortarlo y apoyarlo en un espejo plano. Ver qué sucede. Repetir lo mismo con un prisma o pirámide cuadrangular, un cubo, un cilindro, cono o esfera, y ver la diferencia entre estos cuerpos y un cuerpo cualquiera. Apreciar el plano de simetría.
- d) - Con tres espejos: uno horizontal y dos verticales móviles formando ángulo variable, y cañas o listoncitos colocados convenientemente, obtener la imagen de distintos poliedros. Observar la relación entre el ángulo que forman los espejos y el número de caras laterales o de aristas del poliedro.

e) - Podemos llegar a imaginar el cilindro y el cono como casos límites de pirámides y prismas al cerrar cada vez más el ángulo de los dos espejos verticales.

Sombras

Actividades manipulativas

2º y 3º Ciclos

- a) - Realización con arcilla y papel de seis cuerpos: cubo, prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera.
- b) - Con ayuda de un foco luminoso, manipulación de los objetos para observar las diferentes sombras proyectadas, Utilizando ejes de proyección horizontal, vertical e inclinado a 45°.
- Utilización del sol para realizar dibujos, a diferentes distancias, sobre papel, de las sombras de estos cuerpos, para contrastarlos con los dibujos realizados con luz artificial; con el objetivo de ver las diferencias de paralelismo entre el proyector artificial y la luz solar.
- Realización, observación y dibujo de las sombras proyectadas en los tres ejes a estudiar.
- Búsqueda de las figuras planas posibles proyectando los cuerpos desde cualquier dirección.
- Búsqueda, observación y dibujo de las trayectorias de la sombra de un cuerpo estático.
- c) - De la observación de las diferentes sombras, se deducirá la agrupación por familias, de los cuerpos estudiados, según sea la proyección vertical, horizontal o inclinada a 45°.
- d) - Se agrupan las sombras que tenemos dibujadas, según distintos criterios. A continuación, cogiendo los cuerpos correspondientes (los que han producido cada una de las sombras), vemos que quedan clasificados de modos distintos según sea el criterio con el que hemos agrupado las sombras.
- Observaremos que de ningún cuerpo en las 3 proyecciones estudiadas salen sombras iguales.
- d) - Haremos uso del ordenador para hacer la clasificación de las familias encontradas con la manipulación de los cuerpos tratados, usando un procesador de textos con inclusión de figuras geométricas.

Secciones

Actividades manipulativas

2º y 3º Ciclo

- a) - Realización con arcilla de los seis cuerpos a estudiar: cubo, prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera.
- b) - Los cortaremos con alambre fino u otro instrumento de corte y observaremos los diferentes casos posibles dependiendo de la orientación del plano secante.
- Seccionaremos el cubo por todos los planos secantes posibles para buscar todos los polígonos posibles, (triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos).
- Seccionaremos los otros cuerpos geométricos en diferentes planos, para encontrar toda la gama de figuras geométricas que pueden surgir.
- c) - Realizamos estampaciones de todas las secciones obtenidas.
- d) - De la observación de las diferentes secciones, se deducirá su agrupación por familias, según sea la sección vertical, horizontal o inclinada a 45°. Observaremos que de ningún cuerpo estudiado salen secciones todas iguales, a excepción de la esfera, que es el único cuerpo geométrico que sí tiene todas las secciones iguales.
- e) - Haremos uso del ordenador para hacer la clasificación de las familias encontradas con la sección de los cuerpos tratados, usando un procesador de textos con inclusión de figuras geométricas.