

CÁLCULO GEOMÉTRICO DEL LÍMITE DE CIERTAS SUCESIONES RECURRENTE

Juan A. Aledo Sánchez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha

Juan C. Cortés López

Departamento de Matemáticas, I.E.S. Bonifacio Sotos

Resumen

En este trabajo estudiaremos la monotonía, acotación y límites de algunas sucesiones recurrentes desde un enfoque geométrico. Para ello, usamos la técnica de la bisección para construir polígonos regulares de $2n$ lados a partir de polígonos regulares de n lados. En particular, estudiamos la conocida sucesión: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ generalizando los resultados.

Es bien sabido que la demostración de resultados algebraico-analíticos por métodos geométricos, es en general, excepcional. Este tipo de pruebas aprovechan las propiedades geométricas que están implícitas en los enunciados que se desean demostrar. Así por ejemplo, la parte de la Teoría de Números que se dedica al estudio de los Números Figurativos, más concretamente a los Números Poligonales, aprovecha las disposiciones geométricas en forma de polígonos para establecer identidades algebraicas. De esta forma la conocida igualdad:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

se deduce a partir de la figura poligonal:

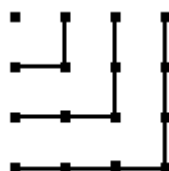


Figura 1.- Suma geométrica de los "n" primeros impares.

Al igual que en el artículo [1] donde a partir de un razonamiento geométrico sobre polígonos regulares, demostramos los conocidos infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

en el presente trabajo, aprovechamos el significado geométrico de la bisección (usado para construir un polígono regular de $2n$ lados a partir de un polígono regular de n lados) para calcular límites de ciertas sucesiones recurrentes, por una vía diferente a la habitual. En particular abordaremos la sucesión:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \quad (1)$$

la cual puede definirse recurrentemente como:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad n \geq 1, \quad (2)$$

En [2] puede encontrarse el cálculo de su límite. Brevemente, para ello se demuestra que dicha sucesión es convergente, probando previamente que es monótona creciente y acotada superiormente; finalmente llamando $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, tomando límites en la fórmula recurrente (2) y teniendo en cuenta que $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ se llega a la ecuación algebraica: $L^2 = 2 + L$ cuyas soluciones son $L = -1$ y $L = 2$. Obviamente como se trata de una sucesión de términos positivos, $L = 2$ es el límite buscado.

Nuestro objetivo es calcular el límite de la sucesión (2) usando la interpretación geométrica del método de bisección. Para ello, necesitamos establecer previamente la relación entre la longitud del lado del polígono regular de n lados y la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados construido a partir del anterior por bisección de sus lados. Para simplificar trabajaremos con la circunferencia goniométrica, esto es, de radio unidad.

Es sencillo probar

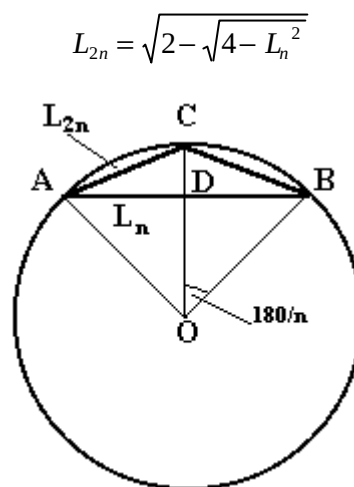


Figura 2.-Construcción de un polígono por el método de bisección.

ya que, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos CDB y ODB de la figura 2, obtenemos respectivamente:

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4} L_n^2 + \overline{CD}^2}, \quad \overline{OD} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} L_n^2}$$

y como $\overline{CD} = 1 - \overline{OD}$ se tiene

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4} L_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} L_n^2}\right)^2}$$

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}} \quad n \geq 3, \quad (3)$$

Así, supongamos que sobre la circunferencia goniométrica construimos - de un modo exacto- el cuadrado, que tendrá de lado $L_4 = \sqrt{2}$, y a partir de él, construimos por bisección los polígonos de 8, 16, 32, ..., 2^n , ... lados. Haciendo uso de la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{2^n} = 0$$

pero por otra parte como $L_4 = \sqrt{2}$, usando (3), la sucesión:

$$\begin{aligned} L_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ L_{16} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ L_{32} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

tiene como límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 0.$$

De donde resulta inmediatamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

Además, obsérvese que mediante este razonamiento no sólo calculamos el límite directamente, sin probar previamente su existencia, sino que por la construcción geométrica se deduce claramente que la sucesión $\{y_n\}_{n \geq 0}$:

$$y_n = \sqrt{2 - x_n} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{donde} \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{siendo} \quad x_0 = \sqrt{2}$$

es estrictamente decreciente (por representar la longitud del lado del polígono regular construido por bisección) y además esta sucesión $\{y_n\}_{n \geq 0}$ está acotada inferiormente por cero (ya que, la longitud es una cantidad positiva); esto nos permite asegurar que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ es monótona creciente y está acotada superiormente por 2, como pretendíamos probar.

Repitiendo el razonamiento partiendo ahora del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia goniométrica, y teniendo en cuenta que $L_3 = \sqrt{3}$, la sucesión de las longitudes de los lados de los polígonos regulares construidos por bisección a partir del triángulo viene dada por:

$$\begin{aligned} L_6 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2}} = 1 \\ L_{12} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (1)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ L_{24} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \\ L_{48} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Al igual que en el caso anterior, y apoyándonos en la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{3 \cdot 2^n} = 0$$

Así pues, razonando como antes a partir de la sucesión $\{t_n\}_{n \geq 0}$ definida por:

$$t_n = \sqrt{2 - z_n} \quad \forall n \geq 0 \quad \text{donde} \quad z_n = \sqrt{2 + z_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad \text{siendo} \quad z_0 = \sqrt{3}$$

se tiene $\{z_n\}_{n \geq 0}$ es creciente y acotada superiormente por 2 y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2$$

que coincide con el anterior a pesar de que variamos la condición inicial.

Y en general, partiendo del polígono regular de k lados que nos proporciona la condición inicial

$$a_0 = L_k = 2 \operatorname{sen} \frac{p}{k}, \text{ se tiene:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

siendo:

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad a_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{p}{k} \quad \forall k \geq 3$$

y de nuevo vemos, geométricamente, que el límite no depende de la condición inicial.

Para terminar aprovecharemos este enfoque geométrico para calcular excelentes aproximaciones al número p . En efecto, si $L(P_{2n})$ denota el perímetro del polígono regular de $2n$ lados, como la sucesión de longitudes se aproxima más y más a la longitud de la circunferencia goniométrica, que es $2p$, en la cual están inscritos, se tiene, usando que la longitud L_n del lado de un polígono regular de n lados es $L_n = 2 \operatorname{sen} \frac{p}{n} \quad \forall n \geq 3$:

$$\begin{aligned} 2p &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 \operatorname{sen} \frac{p}{n}\right)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{p}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2}n \sqrt{1 - \cos \frac{p}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \operatorname{sen} \frac{p}{2n} \end{aligned}$$

esto es:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{sen} \frac{p}{2n}$$

así, para $n = 1000$ obtenemos la siguiente aproximación de p : $p = 3.1415914$ que proporciona cinco cifras decimales exactas.

BIBLIOGRAFÍA

- .- CORTÉS LÓPEZ, J.C. y CALBO SANJUÁN, G; "Infinitésimos desde los polígonos regulares" .Aparecerá en la revista EPSILON.
- .- RIVAUD J.; Ejercicios de Análisis. Tomo I, pág. 96. Ed. Aguilar (1975).