

LOS NUEVOS PLANES DE ESTUDIO EN LAS ESCUELAS UNIVERSITARIAS: ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS DE UNA FORMA ACTUALIZADA E INTEGRADORA



“El modelaje matemático es el arte de
aplicar las matemáticas a una situación
de la vida real”

M.B. Torres, J.L. Fernández

Introducción

Desde mi punto de vista la educación de un individuo es uno de sus derechos fundamentales. La tarea diaria de la enseñanza, en la que estamos involucrados muchos docentes, es costosa. En particular, la Universidad debe hacer frente a nuevos desafíos, adaptándose a las necesidades demandadas por la actual sociedad. La Universidad de Burgos es una universidad joven que “ha nacido” en una época de grandes cambios en el mundo universitario, centrada en los nuevos planes de estudio y en la creación de nuevas titulaciones tecnológicas. Ahora tenemos menos créditos teóricos y muchos más prácticos. Los conceptos teóricos explicados en las clases deben ser continuados y ejemplificados en las clases prácticas. Pero *¿qué tipo de ejemplos?*. Dado que pertenecemos al área de Matemática Aplicada y que todos nuestros alumnos son estudiantes de ingeniería debemos proponer problemas que les ayuden a relacionar conceptos comunes a diferentes asignaturas, mostrándoles como las matemáticas están presentes en problemas reales y que no sólo es una disciplina más dentro del mundo académico, sino que es parte de un esfuerzo desarrollado a lo largo de la historia para resolver problemas científicos y técnicos.

1. Un problema concreto : Estudio del flujo de un fluido a través de una tubería

Presentamos 4 problemas que ejemplifican cada uno de los 4 casos matemáticamente diferentes que hemos encontrado en el análisis del flujo de un fluido según las variables conocidas en el problema.

Problema 1. Una tubería horizontal y lisa de 1000 m de largo se conecta a un depósito muy grande. ¿Qué profundidad debe mantenerse en el depósito para producir $0.0084 \text{ m}^3/\text{s}$ de agua siendo el diámetro interior de la tubería lisa de 75 mm?. El agua se descarga a la atmósfera. Datos: $\mu = 10^{-3} \text{ Kg/ms}$, $r = 999 \text{ Kg/m}^3$

Problema 2. Los puntos A y B están unidos por una tubería nueva de acero de diámetro interior 15 cm y longitud 1200 m. El punto B está situado 15 cm por encima de A y las presiones en A y B son 8.6 kp/cm^2 y 3.4 Kp/cm^2 . ¿Qué caudal de fuel circulará entre A y B a 21°C ?. Datos: $n = \frac{\mu}{r} = 3.3810^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $e_{\text{acero}} = 0.006 \text{ cm}$

Problema 3. Determinar el diámetro de una tubería de fundición sin recubrimiento de longitud 1000 m cuando fluye fuel-oil a 15°C a una velocidad de 15 m/s sabiendo que la pérdida de carga en ese trayecto es de 7.40 m. Datos: $n = \frac{\mu}{r} = 4.4210^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $e = 0.024 \text{ cm}$.

Problema 4. Desde un punto 2 de cota 66.66 m se está descargando gasolina a través de una tubería. El punto 1 a 965.5 m en la tubería a partir del punto 2, tiene una cota de 82.65 m y la presión es de 2.50 Kpa. Si la tubería tiene una rugosidad de 0.500 mm ¿qué diámetro de tubería es necesario para descargar un caudal de $0.10 \text{ m}^3/\text{s}$ de gasolina? Datos: $g = 7.05 \text{ k/m}$, $\mu = 2.92 \cdot 10^{-4} \text{ Ns/m}^2$, $r = 719 \text{ Kg/m}^3$

2. Breve resumen del planteamiento físico del problema. Ecuaciones.

Ecuación de continuidad (balance de materia): $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$ (1) donde Q es el caudal, A es el área de la sección y v es la velocidad de la corriente.

Ecuación de Bernoulli (balance de energía): $\left(z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_f$ (2) donde h_f

es la energía que pierde el fluido al atravesar la tubería entre los puntos 1 y 2, z es la altura, v es la velocidad, p la presión y γ el peso específico. (las unidades de la ecuación son metros).

Pérdida de carga. Coeficiente de fricción. La fórmula de Darcy-Weisbach es la básica para el cálculo de

las pérdidas de carga en las tuberías: $h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$ (3) donde f es el llamado coeficiente de fricción, L es la longitud, d diámetro, v es la velocidad y g la gravedad.

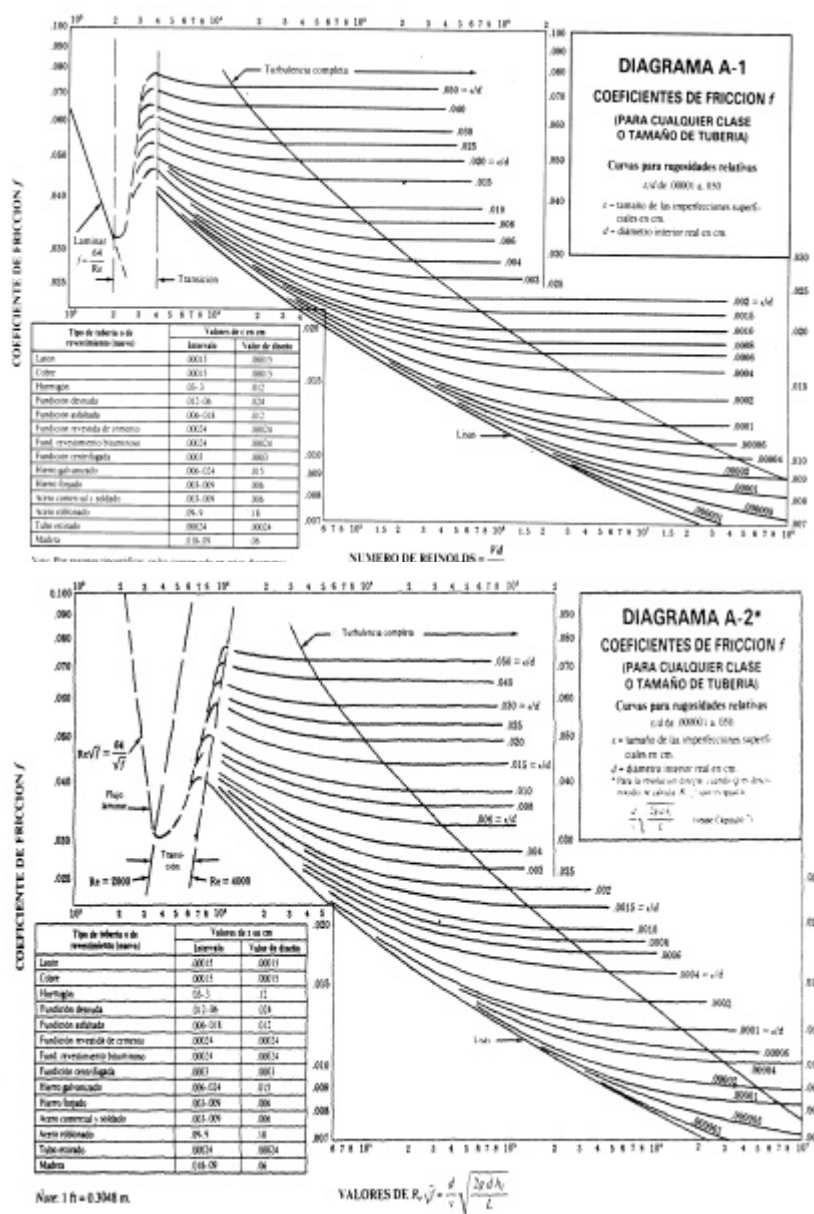
Flujo laminar y turbulento. Número de Reynolds. Para régimen turbulento (número de Reynolds mayor que 2000) el propio Hydraulic Institute de los Estados Unidos de América propone la ecuación de Cole-

brook $\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3.7d} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$ (4), válida para todo tipo de tuberías, donde ϵ es la rugosidad

de la tubería. Re es el número de Reynolds que viene dado por la siguiente expresión: $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$ donde v es la velocidad, d es el diámetro de la tubería, ρ es la densidad del fluido y μ es la viscosidad.

3. Diagrama de Moody.

Los ingenieros, físicos, químicos disponen y así lo muestran en las aulas y en la mayoría de los libros publicados ("Mecánica de los Fluidos e Hidráulica", R. V. Giles y otros, Ed. Shaum), unos diagramas que dan las relaciones existentes entre el coeficiente de fricción f , el número de Reynolds Re y la rugosidad relativa ε/d . El primero se llama Diagrama de Moody, publicado por cortesía de la American Society of Mechanical Engineers y se utiliza normalmente cuando se conoce el caudal, Q . Y el otro se utiliza cuando éste es desconocido. Esta forma la sugirieron S.P. Johnson y Hunter Rouse



4. Planteamiento del problema en una clase práctica de matemáticas.Problema 1.

- a. Plantee físicamente el problema escribiendo las 4 ecuaciones estudiadas anteriormente. Compruebe que el flujo es turbulento.
- b. Intente reescribir la ecuación de Colebrook de la siguiente forma: $\frac{1}{x} = -2 \log \left(C + \frac{B}{x} \right)$ ¿Quién es x , C y B ?
- c. Halle una función $g(x)$ cuyo punto fijo coincida con la solución de la anterior ecuación. (Indicación: invierta la ecuación anteriormente planteada). Dibuje esta función y la recta $y=x$. Obtenga gráficamente el punto fijo de $g(x)$. Itere utilizando nuestro programa dicha función para obtener numéricamente el punto fijo buscado. Pruebe con varias aproximaciones iniciales. Dibuje el módulo de la derivada de la función $g(x)$ y la recta $y=1$. ¿Qué puede decir?
- d. Obtenga la función $f(x)$ cuya raíz al cuadrado es el factor de fricción.
- e. Intente resolver la ecuación de Colebrook utilizando el método de Newton.
- f. Una vez hallado f , calcule la pérdida de carga a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach. Después calcule la profundidad del depósito a partir de la ecuación de Bernoulli.
- g. Suponga ahora que la tubería no es lisa, siendo $\varepsilon = 0.024 \text{ cm}$. Intente repetir los anteriores apartados.

Objetivo del problema: (El ingeniero “entra” en el d. de Moody con la rugosidad relativa y eRe y “obtiene” f.)

- Nuestro ingeniero puede comprobar la fuerte herramienta matemática de que dispone para resolver su bien conocida ecuación de Colebrook de forma mucho más precisa que acudiendo al diagrama de Moody.
- Análisis de la rapidez de convergencia de cada uno de los métodos numéricos empleados.
- El cambio del tipo de tubería no complica matemáticamente el problema y podemos obtener de forma sencilla una nueva solución.

Problema 2

Suponiendo régimen turbulento escriba las ecuaciones de Darcy-Weisbach y de Colebrook. ¿Están desacopladas como en el caso anterior? Intente obtener de la primera ecuación la velocidad en función del factor de fricción y sustituya en la segunda. ¿Qué sucede? ¿Sería ahora capaz de hallar el factor de fricción sin necesidad de iterar? Inténtelo. Obtenga la velocidad y el caudal pedido en el problema. Compruebe que sí se trataba de régimen turbulento

Objetivo.

- Hacer reflexionar al alumno antes de que “se lance” a utilizar métodos numéricos. Es importante que vea el “tipo de ecuación” que debe resolver en cada caso.

Problema 3.

- a. Suponiendo régimen turbulento escriba las ecuaciones de Darcy-Weisbach y de Colebrook.
- b. Intente obtener de la primera ecuación el diámetro en función del factor de fricción y sustituya en la segunda. Intente reescribir la ecuación de Colebrook de la siguiente forma $\frac{1}{x} = -2 \log \left(\frac{C}{x^2} + \frac{B}{x^3} \right)$ ¿Quién es x , C y B ?
- c. Repita los apartados c-e del problema 1. Obtenga el diámetro de la tubería.

Objetivo: (El ingeniero al no tener el diámetro no puede “entrar” en el diagrama de Moody. En sus clases supone un valor de f inicial y de la ecuación de Darcy-Weisbach obtiene el diámetro con el que construye el número de Re . Ahora ya puede “entrar” en el diagrama y obtiene otro f y repite el proceso hasta alcanzar convergencia)

- Que comprendan que deben intentar hallar la ecuación “definitiva” y realizar “bien” la iteración resolviendo el problema de forma similar al 1. El error será menor ya que en cada paso no recurrimos a un diagrama.

Problema 4.

- Suponiendo régimen turbulento escriba las ecuaciones de Darcy-Weisbach y de Colebrook.
- Intente obtener de la primera ecuación el diámetro en función del factor de fricción y sustituya en la segunda. Reflexione: ahora no conoce la v como en el anterior problema sino el caudal. Intente reescribir la

ecuación de Colebrook de la siguiente forma $\frac{1}{x} = -2 \log \left(\frac{C}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{B\sqrt{x^2}}{x} \right)$ ¿Quien es x , C y B ?

- Repita los apartados c-e del problema 1. Obtenga el diámetro de la tubería y la velocidad.

Objetivo:

- Este problema, aunque es similar al anterior no es igual, ya que desconocen la velocidad que tienen que poner utilizando la ecuación de continuidad en función del diámetro. Por eso ahora la ecuación que deben iterar es otra. De esta forma pueden generalizar todos estos problemas y utilizando el mismo método resolver todos, sin necesidad de acudir a diagramas mucho más engorrosos y cometiéndose mayor error

5. Conclusiones: Este es un ejemplo muy general de la necesidad que tienen nuestros alumnos de las Escuelas de Ingeniería en tener una fuerte herramienta matemática para resolver problemas pertenecientes a sus materias. Los métodos para resolverles son diversos: desde utilizar el Programa DERIVE , MATLAB, el programa fortran que nosotros tenemos o incluso manejando la calculadora.