

CALCULO DE EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES CON DERIVE

Zapatero Moreno, María José
Heras González, Pilar de las

Resumen

En este trabajo, mostramos cómo **DERIVE** calcula los extremos relativos de funciones de varias variables. Para ello, pondremos varios ejemplos de funciones de dos variables. Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, el cálculo de los puntos estacionarios o críticos de f en A supone la necesidad de resolver un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

que en general, es no lineal.

DERIVE resuelve estos sistemas, en el caso lineal, utilizando la función **SOLVE** y en el caso no lineal, utilizando la función **NEWTONS** del fichero **SOLVE.MTH**, que tiene implementado el METODO DE NEWTON para sistemas no lineales.

La sintaxis de la función **NEWTONS** para nuestros ejemplos será:

NEWTONS ($[a, b]$, $[x, y]$, $[x_0, y_0]$, n), donde $a = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, $[x_0, y_0]$ es el iterante inicial, y

n el n° de iteraciones.

Si el método converge, tendremos una solución del sistema.

Haremos unos ejemplos en los que el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

se puede reducir a uno lineal, resolviéndolo utilizando la función **SOLVE** y ejemplos en los que dicho sistema no se puede reducir a uno lineal, resolviéndolo utilizando la función **NEWTONS**.

En algunos de los ejemplos expuestos analizaremos si los puntos estacionarios encontrados son extremos relativos o no, usando la matriz Hessiana.

A continuación detallaremos los problemas que vamos a resolver con el programa **DERIVE**

Ejemplo 1

```

#1: "Hallar los extremos relativos de la función  $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$ "
#2:  $f := x^4 + y^4 - 2 \cdot (x - y)^2$ 
#3:  $\left[ a := \frac{d}{dx} f, b := \frac{d}{dy} f \right]$ 
#4:  $\left[ 4 \cdot x^3 - 4 \cdot x + 4 \cdot y, 4 \cdot x + 4 \cdot y^3 - 4 \cdot y \right]$ 
#5: SOLVE( $4 \cdot x + 4 \cdot y^3 - 4 \cdot y, x$ )
#6:  $\left[ x = y \cdot (1 - y^2) \right]$ 
#7:  $4 \cdot (y \cdot (1 - y^2))^3 - 4 \cdot (y \cdot (1 - y^2)) + 4 \cdot y$ 
#8: SOLVE( $4 \cdot (y \cdot (1 - y^2))^3 - 4 \cdot (y \cdot (1 - y^2)) + 4 \cdot y, y$ )
#9:  $\left[ y = 0, y = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right]$ 
#10: "los puntos críticos son  $(0,0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ "
#11: "Calculamos la matriz Hessiana"
#12: GRAD([a, b], [x, y])

#13:  $H(x, y) := \begin{bmatrix} 12 \cdot x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12 \cdot y^2 - 4 \end{bmatrix}$ 
#14: H(0, 0)
#15:  $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ 
#16: " $(0,0)$  es un punto de silla pues si nos acercamos al origen por la recta  $y=x$ ,  $f(x,y)=2x^4 > 0$ "
#23: "pero por la recta  $y=0$ ,  $f(x,y)=x^4-2x^2$  que es negativo para puntos  $(x,0)$  próximos a  $(0,0)$ "
#18: H(-√2, √2)
#19:  $\begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ 
#20: "el punto  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  es un mínimo"
#21: "como  $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})=f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})=-8$  el punto  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  es también mínimo"

```

Ejemplo 2

```

#1: "Calcular los extremos relativos de la función  $f(x,y)=xye^{(x+2y)}$ "
#2:  $f := x \cdot y \cdot e^{x + 2 \cdot y}$ 
#3:  $\left[ a := \frac{d}{dx} f, b := \frac{d}{dy} f \right]$ 

```

```

#4: [êx + 2·y · (x·y + y), x·êx + 2·y · (2·y + 1)]
#5: SOLVE(2·y + 1, y)
#6: [y = - 1/2]
#7: x · (- 1/2) + - 1/2
#8: SOLVE(x · (- 1/2) + - 1/2, x)
#9: [x = -1]
#10: "los puntos críticos son (0,0),(-1,-1/2)"
#11: "Calculamos la matriz Hessiana en ambos puntos"
#25: GRAD([a, b], [x, y])

#16: H(x, y) := [
    êx + 2·y · (x·y + 2·y)      êx + 2·y · (x·(2·y + 1) + 2·y + 1)
    êx + 2·y · (x·(2·y + 1) + 2·y + 1)      4·x·êx + 2·y · (y + 1)
]
#17: H(0, 0)
#18: [ 0  1
      1  0 ]
#19: "f alcanza en (0,0) un punto de silla"

#20: H(-1, - 1/2)
#21: [ -ê-2      0
      0      -2·ê-2 ]
#22: DET [ -ê-2      0
           0      -2·ê-2 ]
#23: ê-4
#24: "H1=-ê-2/2<0, H2=ê-4>0, f alcanza en (-1,-1/2) un máximo relativo"

```

Ejemplo 3

```

#1: "File SOLVE.MTH, copyright (c) 1990 by Soft Warehouse, Inc."
#2: NEWTON_AUX(a,x,x0,n):=ITERATES(x·k-ELEMENT(ROW_REDUCE(lim a)',DIMENSION(a)+1),x·k,x0,n)
#3: NEWTONS(u, x, x0, n) := NEWTON_AUX(APPEND(GRAD(u, x), [u])', x, x0, n)
#4: "Buscar los puntos críticos de la función u(x,y)=x^2+y^2-2xy^3"
#5: u := x^2 + y^2 - 2·x·y^3
#6: [a := d/dx u, b := d/dy u]
#7: [2·x - 2·y^3, 2·y - 6·x·y^2]
#8: "Primero buscamos las soluciones con SOLVE"
#9: SOLVE(2·x - 2·y^3, x)
#10: [x = y^3]

```

```

#11: 2·y - 6·y3·y2
#12: 2·y - 6·y5
#13: SOLVE(2·y - 6·y5, y)
#14:  $\left[ y = 0, y = \frac{3^{3/4}}{3}, y = -\frac{3^{3/4}}{3}, y = \frac{3^{3/4} \cdot i}{3}, y = -\frac{3^{3/4} \cdot i}{3} \right]$ 
#15: [y = 0, y = 0.75983568565159254733, y = -0.75983568565159254733]
#16: 0.759835685651592547333
#17: 0.43869133765083082027
#18: (-0.75983568565159254733)3
#19: -0.43869133765083082027
#20: "Ahora comprobamos con el método de Newton"
#21: NEWTONS([a, b], [x, y], [0.5, 0.5], ?)

```

```

#22:  $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.41176470588235294117 & 0.88235294117647058823 \\ 0.43275853687066644390 & 0.77352006027412498813 \\ 0.43853305238472591395 & 0.75998816764872650590 \\ 0.43869129000834738582 & 0.75983568874776320174 \\ 0.43869133765083052907 & 0.75983568565159239182 \\ 0.43869133765083082027 & 0.75983568565159254733 \\ 0.43869133765083082027 & 0.75983568565159254733 \end{bmatrix}$ 

```

```

#23: NEWTONS([a, b], [x, y], [-0.5, -0.5], ?)
#24:  $\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.41176470588235294117 & -0.88235294117647058823 \\ -0.43275853687066644390 & -0.77352006027412498813 \\ -0.43853305238472591395 & -0.75998816764872650590 \\ -0.43869129000834738582 & -0.75983568874776320174 \\ -0.43869133765083052907 & -0.75983568565159239182 \\ -0.43869133765083082027 & -0.75983568565159254733 \\ -0.43869133765083082027 & -0.75983568565159254733 \end{bmatrix}$ 

```

```

#25: NEWTONS([a, b], [x, y], [-0.4386, 0.7998], 8)

```

```

#26:  $\begin{bmatrix} -0.4386 & 0.7998 \\ -0.092728818696354704409 & 0.48487958307387825513 \\ -0.25540157358222455741 & -0.038851942273965250635 \\ 0.00012843270056514393005 & 0.0024601851640784569736 \\ -2.9780680437170090269 \cdot 10^{-8} & -4.6645916164689544598 \cdot 10^{-9} \\ 2.0298700396919683077 \cdot 10^{-25} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

```

```

#27: NEWTONS([a, b], [x, y], [100, 100], 17)

```

	100	100
	66.664444666649384115	66.668888814822221646
	44.439631527221281901	44.449258626733046262
	29.621428417895558333	29.637836617818941154
	19.740146132613946270	19.766048681605851790
	13.148942273513119981	13.188584159883146702
	8.7494095878022482767	8.8091566630203434838
	5.8087094303255299714	5.8977222106083520251
	3.8380534132961854492	3.9685956039139256108
#28:	2.5129519765436155566	2.6989154120270795964
	1.6227514928057526222	1.8735364747255095745
	1.0389102508899319466	1.3476823538565858739
	0.68639636315830842591	1.0244282399804884352
	0.50916809127819276678	0.84467704113563221825
	0.44798653046051753203	0.77241469894173897856
	0.43891335123348270474	0.76016346546496682106
	0.43869148116322715468	0.75983590975426160537
	0.43869133765089431062	0.75983568565169529933
	0.43869133765083082027	0.75983568565159254733
	0.43869133765083082027	0.75983568565159254733

Ejemplo 4

```

#1: "File SOLVE.MTH, copyright (c) 1990 by Soft Warehouse, Inc."
#2: NEWTON_AUX(a,x,x0,n):=ITERATES(x-k-ELEMENT(ROW_REDUCE( lim_{x→x-k} a)',DIMENSION(a)+1),x-k,x0,n)
#3: NEWTONS(u, x, x0, n) := NEWTON_AUX(APPEND(GRAD(u, x), [u])', x, x0, n)
#4: "Buscar los puntos estacionarios de u(x,y)=cos^2(x)y^2+2xsen(y)+sen^2(x)cos(y)"
#5: u := COS(x)^2·y^2 + 2·x·SIN(y) + SIN(x)^2·COS(y)
#6: [ a := d/dx u, b := d/dy u ]
#7: [ SIN(x)·COS(x)·(2·COS(y) - 2·y^2) + 2·SIN(y), 2·y·COS(x)^2 - SIN(x)^2·SIN(y) + 2·x·COS(y) ]
#8: "en este caso SOLVE no sirve"
#9: SOLVE(SIN(x)·COS(x)·(2·COS(y) - 2·y^2) + 2·SIN(y), x)
#10: [ SIN(x)·COS(x) = SIN(y) / (y^2 - COS(y)) ]
#11: "tiene infinitas soluciones y Newton las va sacando poco a poco"
#12: NEWTONS([a, b], [x, y], [1, 1], 7)

```

	1	1
	0.90520882802377085198	1.8174052538225293455
	1.0195200801449132965	1.5525968551003121366
	1.0680573738752281729	1.5442234657323802432
#13:	1.0685204452102012731	1.5469532700304932694
	1.0685208998189563701	1.5469514300583907582
	1.0685208998209477559	1.5469514300571987932
	1.0685208998209477559	1.5469514300571987932

#14: NEWTONS([a, b], [x, y], [2, 2], 13)

	2	2
	1.59572727279014762810	1.0195147900501424260
	0.21201167174059711183	0.76423126737514754496
	-11.408293552379749520	3.5545725513645847524
	-10.180882109154543002	5.3000155066995712086
	-15.641153710449450951	1.3007025364217759503
#15:	-15.022269459706250850	1.4788389991076769947
	-15.201016458453675292	1.5022171323179797983
	-15.149815808825515832	1.5081581798636436198
	-15.146378523858571183	1.5087368182720909040
	-15.146362756002940991	1.5087394453233030950
	-15.146362755668248380	1.5087394453787352371
	-15.146362755668248379	1.5087394453787352371
	-15.146362755668248379	1.5087394453787352371

#16: NEWTONS([a, b], [x, y], [10, -10], 9)

	10	-10
	7.3261763908884465411	-18.025718902283473244
	8.0001543397687087863	-15.989423619179212583
	7.7597366353963690076	-19.936403015356717836
	7.8645256330076275613	-20.586545374531101548
#17:	7.8564545661347729887	-20.483811175194585614
	7.8563597518679430369	-20.483894186147606039
	7.8563597526996129588	-20.483894163171512379
	7.8563597526996129601	-20.48389416317151238
	7.8563597526996129601	-20.48389416317151238