

## LA ENSEÑANZA DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN EL PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD. UNA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE MANUALES EN CUANTO A CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS. APLICACIÓN A UN MANUAL.

**Contreras de la Fuente, Ángel.** Universidad de Jaén.  
**Luque Ordóñez, Lorenzo.** I.E.S. “Pablo de Olavide” de La Carolina (Jaén).  
**Ordóñez Cañada, Lourdes.** I.E.S. “Martín Halaja” de La Carolina (Jaén).  
**Ortega Carpio, Manuela.** Universidad de Jaén.  
**Sánchez Gómez, Carmen.** Universidad de Jaén.

### INTRODUCCIÓN

Un fenómeno didáctico que se produce, en general, en la enseñanza del Cálculo Infinitesimal a nivel preuniversitario y universitario es que a los estudiantes se les proponen actividades donde el conocimiento a enseñar pierde rápidamente su significación, transformándose en mecanismos de cálculo que se han adquirir. Así, tan pronto como un concepto se estudia se traduce algebraicamente y se pone bajo forma algorítmica. Es decir, con gran rapidez se proponen a los alumnos ejercicios de cálculo, los cuales constituyen la mayoría de las actividades que sustentan estas nociones.

Como señala El Bouazzoui (1988), este fenómeno es particularmente evidente en el caso del concepto de continuidad, la cual goza de un estatus diferente con respecto a los otros conceptos utilizados en el Cálculo (límite, derivada, ...). En efecto, mientras que las otras nociones son instrumentales y operacionales (en el sentido en que ellos producen resultados cuantitativos), la continuidad es una propiedad esencialmente cualitativa: se buscan y calculan límites y derivadas de funciones, mientras que se demuestra o se verifica que una función es continua o no. A falta de poder “algebrizar” esta noción (la continuidad de una función no se calcula), los alumnos aprenden bastante pronto a aprender frases típicas tales como “toda función polinómica es continua sobre  $\mathbb{R}$ ”, etc.

Vemos, por tanto, que, con relación a otras nociones, hay una ruptura del contrato didáctico, en el sentido de Brousseau (1986), a nivel del estudio de una función. Estudiar una función es buscar un cierto número de informaciones sobre la misma, tales como el dominio, los límites en su frontera, si es continua, si es derivable en el dominio, etc. Sin embargo, para el alumno, la continuidad y el dominio aparecen como objetos de la misma naturaleza: saber dónde está definida la función y dónde no lo está es “casi la misma cosa” que saber dónde es continua y dónde no lo es. El dominio de definición se confunde con el dominio de la continuidad de una función para casi la totalidad de los ejercicios tratados en clase. La diferencia no la aprecian, ya que no tienen forma de diferenciar entre una función definida por una única expresión y una función general definida por varias expresiones. La primera tiene un dominio de definición donde “no hay accidente” y donde “todo va bien”, mientras que para la segunda es necesario relacionar las expresiones. En efecto, se trata sin duda de funciones en ambos casos, pero las dos constituyen objetos de estudio de tipos distintos y exigen comportamientos muy diferentes.

Esta ruptura no es detectada ni por los alumnos ni por los profesores que tratan los dos tipos de funciones de la misma forma. En cierto modo, subyace la idea de que “una función es una función sea cual sea la forma en que se define”.

Todas estas observaciones muestran que la continuidad vive, a nivel educativo, como un tema algo descuidado en la enseñanza del Cálculo Infinitesimal. Y, sin embargo, se trata de una noción muy importante tanto en el nivel matemático, donde muchos resultados fundamentales hacen intervenir la continuidad de las funciones, como en la enseñanza de las Matemáticas.

Como podemos deducir es de gran interés el estudio didáctico de este concepto, particularmente en lo que se refiere a las concepciones sobre la noción y los obstáculos que surgen en su desarrollo. En este trabajo se analiza el concepto de continuidad desde la perspectiva de los manuales, ya que estos inducen concepciones y obstáculos en el lector debido al proceso de transposición didáctica. Es decir, este proceso puede provocar la creación e inserción en la enseñanza de objetos didácticos, como son ilustraciones, representaciones gráficas, cuyo control es importante a la hora de lograr una enseñanza significativa.

### CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS ASOCIADOS AL CONCEPTO DE CONTINUIDAD

A lo largo del desarrollo epistemológico del concepto de continuidad se pueden detectar diversas concepciones de la continuidad. En El Bouazzoui (1988), se proponen las siguientes:

CA (concepción ingenua). Asociada al lenguaje corriente “la superficie de la mesa es continua”. Se trata de una concepción global, implícita e intuitiva que se asocia a la idea de cantidad variable con el tiempo.

Es la concepción que hubo hasta los inicios del siglo XVII, tratándose de un concepto protomatemático (Chevallard y Johsua, 1991).

CB (concepción geométrica). La continuidad adquiere un estatus geométrico ligado al trazado de curvas. Es una concepción global y tiene un carácter espacio-temporal, ya que está ligada a la idea de cambio continuo en el tiempo.

Fue la concepción imperante en el siglo XVII con Descartes y Fermat. Es un concepto protomático.

CC (concepción euleriana). Está ligada a la utilización de funciones definidas por una única expresión analítica. Las funciones continuas de Euler eran las derivables. Se trata de una concepción global que se aplica a las curvas y a las funciones analíticas de variable real.

Dominó el siglo XVIII. Es una noción paramatemática.

CD (de Cauchy). Aquí se da el encuentro de la continuidad con el límite, disociándose de la concepción geométrica. Es una concepción local, numérica, ligada a las funciones numéricas analíticas.

Fue la que predominó en la primera mitad del siglo XIX. Evolución de concepción paramatemática a matemática.

CE (de Weierstrass-Darboux). Se define la continuidad con  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Se trata de una concepción local, numérica y aplicada a funciones arbitrarias.

Dominó la segunda mitad del siglo XIX. Es una noción matemática.

Cada una de estas concepciones constituyeron obstáculos para la siguiente. Así, la CA supone un fuerte arraigo con el lenguaje corriente, lo cual constituye una idea previa del alumno difícil de superar.

La CB, dado su carácter eminentemente visual puede ser difícil de superar.

La concepción euleriana (CC) tiene la dificultad de tener que “romper” con la idea de la función con una única expresión analítica. Por otra parte, al apreciarse la continuidad, intuitivamente, como un proceso “suave y no brusco”, conduce a no admitir como continuas las funciones no derivables.

La CD contiene todos los problemas relacionados con la idea de límite. El carácter intuitivo de la noción de límite de Cauchy, hace difícil el pasar a admitir el rigor del  $\varepsilon$  y  $\delta$ .

Es decir, cada una de las concepciones es un obstáculo epistemológico para la comprensión de la siguiente.

En el análisis de los manuales se han observado un obstáculo didáctico, ya señalado para límites (Sánchez y Contreras, 1998):

O<sub>a</sub>: Uso exclusivo de la aproximación gráfica para el estudio de la continuidad, sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente.

## ANÁLISIS DE UN MANUAL DE PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD

Se ha elegido un manual de primer curso de Universidad en el que aparecen con especial significación algunos de los términos expresados anteriormente.

Está presente la concepción CA, al utilizarse expresiones como “unir los puntos con una línea continua”. Esta concepción puede llegar a convertirse en obstáculo ya que no se discriminan situaciones en las que el hecho de poder unir con una línea continua no garantiza la continuidad (caso de no continuidad en un intervalo cerrado y, sin embargo, puedo unir con una línea continua).

La utilización de gráficas de funciones abstractas como apoyo a la enseñanza del concepto, sin el empleo de tablas numéricas, puede conducir al obstáculo O<sub>a</sub>.

Se habla de continuidad en un intervalo que, de modo intuitivo, corresponde a la concepción CB. Por tanto, habría que haber favorecido el estudio con figuras que hubieran aclarado. Además, para que la concepción CC no se constituya en obstáculo habría que haber utilizado casos de funciones no derivables, pero continuas.

Dado que se aborda la concepción CD, al relacionar la continuidad con el límite, debería aparecer un tratamiento de la continuidad donde se abordara la utilización de entornos con  $\varepsilon$  y  $\delta$ . Es decir, al lector se le oculta la concepción CE, cuando es en este nivel universitario donde consideramos que es el lugar adecuado.

## CONCLUSIONES

Los manuales en el desarrollo del discurso matemático sobre la continuidad, según la transposición didáctica que realizan, inducen unas concepciones y obstáculos en los lectores cuya influencia es importante en cuanto a la significación del concepto en los mismos.

En el estudio se ha podido observar cómo se da una ruptura de contrato didáctico al tratar la continuidad de forma menos rigurosa que en el caso de otros conceptos, como el de límite de una función.

Se observa, de modo general, que el paso de una concepción a otra no se efectúa con situaciones que supongan el rechazo de una y la adopción de la otra y que faciliten al lector la realización de los actos de comprensión necesarios para superar los obstáculos. Parece como si para determinados autores de manuales el concepto de continuidad fuera una noción transparente, es decir, no cuestionable en cuanto a la dificultad matemática intrínseca y, por tanto, no problemático a nivel didáctico.

**BIBLIOGRAFÍA**

- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 7, nº 2, pp. 22-115.
- CHEVALLARD, I., JOHSUA, M.A. (1991). *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage, editions.
- EL BOUAZZOUI, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction*. PH. D. Université Laval (Canadá).
- SÁNCHEZ, C. y CONTRERAS, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(1), pp. 73-84.

Nota: Este trabajo se ha realizado dentro del marco del Proyecto: “Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del Análisis Matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del Bachillerato-LOGSE y de primer curso universitario.”, otorgado a los autores de la Comunicación por el Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.), según concurso nacional (Orden Ministerial de 7 de julio de 1998, BOE de 16 de septiembre de 1998).