

UNA METODOLOGÍA DE ANÁLISIS, EN CUANTO A LOS EJEMPLOS QUE APARECEN EN LOS LIBROS DE TEXTO, DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. ESTUDIO DE UN MANUAL DE PRIMER CURSO DE UNIVERSIDAD.

Sánchez Gómez, Carmen. Universidad de Jaén.

Luque Cañada, Lorenzo. I.E.S. "Pablo Olavide" de La Carolina (Jaén).

Ordóñez Cañada, Lourdes. I.E.S. "Martín Halaja" de La Carolina (Jaén).

Ortega Carpio, Manuela. Universidad de Jaén.

Contreras de la Fuente, Ángel. Universidad de Jaén.

Resumen. En el desarrollo de los conceptos, los manuales pueden utilizar una doble vía; o bien se plantea la definición y después los ejemplos de aplicación, o bien se motiva al lector con una colección de ejemplos para, posteriormente, exponer la definición del concepto. En el primer caso, se trata de describir primero la noción de modo estructural y después de forma operativa (Sfard, 1991); mientras que en el segundo caso, el proceso es al contrario.

Tanto en un caso como en el otro, el interés se centra en si los ejemplos completan, o no, el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (Vergnaud, 1990). En este trabajo se propone un tipo de metodología sobre el análisis del concepto de límite de una función en manuales universitarios, basado en la teoría de Vergnaud, en Sánchez (1997) y en Contreras y Sánchez (1998), donde se resalta la importancia de una adecuada elección de los ejemplos en cuanto a la comprensión del concepto. Posteriormente, dicha metodología se aplica al estudio de un manual de primer curso de Universidad.

INTRODUCCIÓN

La investigación en Didáctica de las Matemáticas es una disciplina tanto teórica como empírica. Teórica desde la perspectiva del estudio de las regularidades observadas en el aula cuando se cuestiona el propio saber matemático, alejándose, por tanto, de la típica ilusión de transparencia didáctica respecto a los conocimientos matemáticos. Son numerosos los estudios teóricos que tratan de ir conformando una teoría de la Didáctica de las Matemáticas desligada sustantivamente de otras ciencias como la Pedagogía o la Psicología (Chevallard y cols., 1997). Empírica, en el sentido de ser una disciplina que ha de extraer sus datos de la "realidad" y compararlos con las hipótesis, como señala Wadegg (1997) el laboratorio de la investigación en didáctica es, en consecuencia, tanto el gabinete de trabajo, las aulas, la escuela o la sociedad, como la historia, o como los manuales.

El análisis de manuales constituye una fuente de datos que permite estudiar determinadas variables que tienen una incidencia fundamental en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos (Sánchez, 1997). Por tanto, la utilización de una metodología adecuada en el estudio de los textos escolares es importante para poder ofrecer resultados relevantes sobre los fenómenos observados en el comportamiento de los estudiantes.

Los primeros estudios de manuales siempre estaban referidos a tratados matemáticos dedicados a la construcción del saber, así se refleja en determinados análisis de los textos de Lacroix (Schubring, 1987). Sin embargo, una vez que se tiene en cuenta el proceso de transposición didáctica lo que interesa no únicamente la evolución del saber como tal sino también, y quizás con mayor interés, cómo se ofrece a los estudiantes en los libros de consulta el desarrollo de esos conceptos. Un estudio con detenimiento de lo que aparece en un determinado manual facilitará una fuente de datos que pueden dar respuesta a numerosas preguntas que en la enseñanza-aprendizaje de un concepto determinado pueden formularse: ¿Es adecuada la introducción?, ¿Son claros los ejemplos que se proponen?, ¿Es el nivel correcto para los alumnos a los que se dirige?, ¿A qué obstáculos puede inducir?, ¿Se facilita la elaboración de actos de comprensión capaces de superar los obstáculos inherentes a la noción estudiada?

VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL ESTUDIO

Entre las numerosas variables que pueden intervenir en un análisis de manuales (introducción, definición, ejemplos, obstáculos, actos de comprensión, concepciones...) en este trabajo se ha considerado la variable ejemplos, cuyo tratamiento supone una ampliación de lo expuesto en Contreras y Sánchez (1998).

La variable ejemplos se hace operativa por medio de la consideración de diversas subvariables que son las siguientes:

a) Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.

En el caso del límite de una función, ese conjunto de situaciones supone el que en los ejemplos que se propongan en el libro deba aparecer los casos siguientes:

1. $\exists \lim = f(a)$;
2. $\exists \lim \neq f(a)$;
3. $\exists \lim$ y $\exists / f(a)$;
4. $\exists / \lim$ y $\exists f(a)$;
5. $\exists / \lim$ y $\exists / (a)$

Puesto que son las posibilidades en el límite y en la función. No es difícil ver en algunos textos cómo se tratan dos o tres casos únicamente, aunque reiteradamente.

b) Contexto de la presentación de las situaciones.

Si se trata de un único contexto, por ejemplo el gráfico, que conduce al lector a una interpretación unidireccional del concepto, o bien figuran más de un contexto. En el caso del límite los contextos pueden ser: numérico, gráfico y analítico.

c) Tipo de función utilizada.

Es decir, ver qué tipo de función aparece en los diversos ejemplos que propone el libro. Una variedad de tipología favorecerá el aprendizaje del concepto.

d) Procedimiento de resolución.

La capacidad de relación del alumno del estudiante se facilita si el texto aporta diversos procedimientos de resolución: gráficos, numéricos y algebraicos.

e) Resolución de los ejemplos.

Al estudiante que está aprendiendo por medio del texto que se le ofrece, le surgirán preguntas acerca de la solución de los ejemplos que figuran en el libro, por lo que, en principio, parece conveniente que se solucionen los ejemplos que se proponen. Se considerará que la resolución ha de ser formal y no “intuitiva”

MUESTRA ELEGIDA Y RESULTADOS

Este trabajo es parte de uno más amplio, correspondiente a un proyecto de investigación, en el que se aborda el análisis de numerosos manuales de primer año de Universidad. Sin embargo, dado que la finalidad es mostrar cómo se aplica la metodología expuesta, se ha elegido un manual cuyo contenido ofrece un estudio en el que aparecen con cierta relevancia las subvariables que intervienen en el estudio.

El manual es de primer curso universitario y es utilizado con frecuencia por los estudiantes de la Universidad de Jaén. En el libro se desarrolla el concepto de límite de una función como objeto de conocimiento, lo cual hace interesante el análisis del mismo.

Los resultados obtenidos en el análisis figuran en la tabla siguiente:

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. VARIABLE EJEMPLOS	
Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto	$\exists f(a) = \lim f(x)$; $\exists f(a)$, $\exists \lim f(x)$; $\exists f(a)$, $\exists \lim f(x)$; $\exists f(a)$, $\exists \lim f(x)$
Contexto de la presentación de las situaciones	Analítico (2) Analítico-Gráfico (1) Gráfico (3) Numérico y gráfico (4) Numérico (2)
Tipo de función utilizada	Abstracta (2) “A trozos” (4) Polinómica (2) Racional (2) Trigonométrica (2)
Procedimiento de solución	Analítico (3) Numérico y gráfico (1)
Resolución de los ejemplos	Si (4) No (8)

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A pesar de aparecer doce ejemplos a lo largo de la exposición del límite de una función, no se estudia el caso: $\exists f(a) \neq \exists \text{Lim } f(x)$, por tanto, el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto no está completo.

En el contexto de la presentación de los ejemplos aparecen con mucha frecuencia unas tablas numéricas en las que el autor trata de que el lector extraiga unas consecuencias que, al menos, son discutibles. Al carecer de puntos suspensivos, el alumno puede pensar que los valores son en número finito, o bien, que no son casi todos, lo cual puede conducir al favorecimiento de obstáculos en el alumno. Por otra parte, la palabra “arbitrariamente” puede dar lugar a confusión, ya que este término significa: “acto o proceder contrario a la razón”, quizás sería conveniente utilizar la expresión “tanto como queramos”, aunque ésta hay que aclararla rápidamente para evitar falsas interpretaciones.

En el tipo de funciones utilizadas falta la función irracional que, en un manual que utiliza doce ejemplos, no tiene mucho sentido. El empleo de funciones abstractas, que sin duda es transparente para el autor, puede encontrar alumnos que no le encuentren sentido.

El procedimiento de solución utilizado en el manual, relacionado con aquellos ejemplos en los que se da una solución formal, indica que para el autor está claro que con un ejemplo resuelto mediante la tabla y la gráfica es suficiente, lo cual dar por supuesta una transferencia de conocimiento en el lector que es muy discutible.

BIBLIOGRAFÍA

- CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, J. y BOSCH, M. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación. ICE. Universidad de Barcelona. Horsori.
- CONTRERAS, A. y SÁNCHEZ, C. (1998). Estudio de manuales universitarios de la segunda mitad del siglo XX sobre el concepto de límite de una función en cuanto a los ejemplos. *VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias*, pp. 1-12. Huesca (Jaca).
- SÁNCHEZ, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- SCHUBRING, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7, 3, pp. 41-51.
- SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 1-36.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, 23, pp. 133-170.
- WALDEGG, G. (1997). Historia, Epistemología y Metodología en la Investigación Matemática. *For the Learning of Mathematics*, 17, 1, pp. 43-46.

Nota: Este trabajo se ha realizado dentro del marco del Proyecto PB97-0851: “Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentales en Educación Secundaria y Universidad.”, concedido por la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo (S.E.U.I.D.) (I+D) a los profesores Contreras y Sánchez, según concurso nacional (Resolución de 5 de noviembre de 1997, BOE de 15 de noviembre de 1997).