

PROCESOS DE EXPERIMENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO NUMÉRICO

Honorato Díez y Santiago Ruíz

Introducción

Presentamos aspectos experimentales del cálculo numérico, presentes en la iniciación de dicha materia como parte fundamental de muchas asignaturas de matemáticas de los nuevos planes de estudio en las carreras de ingeniería y ciencias experimentales. El objetivo es servir de apoyo para los trabajos a realizar en laboratorio de matemáticas ayudando al profesor a diseñar, tutorizar, y evaluar sus prácticas. Para ello hemos elegido problemas prácticos dentro de las materias de máximo interés para los alumnos, motivándoles utilizando su propio lenguaje, usando sus propios medios como la calculadora y adaptándonos a sus necesidades. Esto nos permite incentivar la colaboración entre disciplinas y niveles educativos diferentes.

Métodos Iterativos:

Problema: Una generalización de la ley de los gases perfectos $PV = nRT$ es la ecuación de Van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT, \quad R = 0,08205 \frac{\text{l atm}}{\text{K mol}}, \quad n \text{ es el n}^\circ \text{ de moles.}$$

Para isobutano, $a = 12,87 \frac{\text{l}^2 \text{ atm}}{\text{mol}^2}$, $b = 0,1142 \frac{\text{l}}{\text{mol}}$.

Encontrar el volumen de un mol de isobutano a la temperatura de $T = 313^\circ \text{ K}$ y una presión $P = 2 \text{ atm}$.

Cuestionario:

- Deduzca del enunciado el valor $V_0 = 12,84 \text{ l}$ como primera aproximación.
- Obtenga la función $f(V)$ cuya raíz nos da el volumen buscado.
- Plantee un problema de punto fijo ($g(x) = x$) equivalente a ($f(V) = 0$) con tres funciones $g(x)$ siendo una de ellas la función de Newton.

Experimentación:

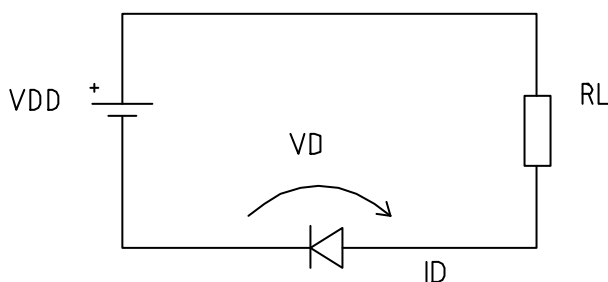
- Los resultados numéricos de la iteración nos dan una idea experimental de la divergencia o convergencia, la rapidez con que converge la observamos mediante el proceso de fijación de cifras.
- Contraste los resultados numéricos y enunciados teóricos con el apoyo del cálculo simbólico y mediante la representación de los siguientes pares de gráficas: (g, x) ($g', 1$).

Errores más comunes de los alumnos:

- Acotar una función en un intervalo tomando solamente como referencia el valor de la función en un punto.
- Confundir la función f con la función de iteración g
- Pensar que el error de aproximación es $|x - g(x)|$ ó $|f(x) - 0|$ y no $|p_n - p^*|$.

Interpolación:

Problema: Calcular el punto de funcionamiento de un diodo en un circuito constituido por una fuente de tensión continua ($V_{DD} = 3 \text{ vol}$) y una resistencia de carga ($R_L = 100 \text{ Ohm}$), este punto se obtiene mediante la intersección de la curva estática del diodo y la recta de carga estática. La recta de carga se obtiene resolviendo la malla del circuito y tiene por ecuación: $Y(\text{Amp}) = -1/R_L (X(\text{Vol}) - V_{DD})$. La curva estática se aproxima por interpolación de la siguiente tabla obtenida experimentalmente aplicando distintas tensiones exteriores:



VD	0.6	0.7	0.7
ID	.00175	.00135	0.11

Cuestionario:

- Estime un valor inicial del punto de corte.
- Obtenga la función $f(x)$ cuya raíz nos da el punto buscado.
- Plantee y estudie el problema de punto fijo correspondiente siguiendo las indicaciones del problema anterior, incluya la función de Newton.
- Calcule el trabajo mediante una integración numérica

Experimentación:

- Visualice el punto de corte mediante la representación gráfica.
- Construya una función exponencial que se ajuste a la curva.
- Contraste los resultados numéricos y teóricos con el apoyo del cálculo simbólico,
- Analice gráficamente el error en la interpolación.

Errores más comunes de los alumnos:

- Confundir la cota del error en la interpolación con la derivada que aparece en él.
- Considerar los polinomios de Newton y Lagrange diferentes.
- Al acotar $f^{n+1}(x)$ para el error no saben en que intervalo.

Fuentes y análisis del error:

Errores de precisión de tensiones e intensidades con los aparatos de medida.

Errores de redondeo debido al uso de un número finito de cifras decimales.

Errores de truncamiento al aproximar la curva característica $G(x)$, por el polinomio.

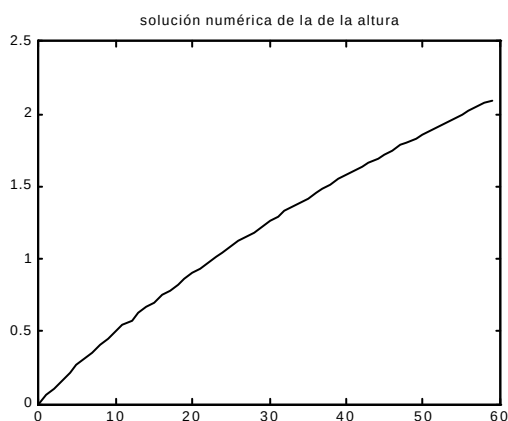
Análisis del planteamiento; condicionamiento; estabilidad y eficiencia del problema.

Ecuaciones diferenciales:

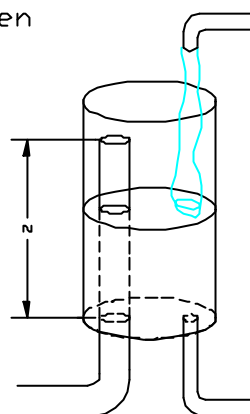
Problema 1: El agua entra en un tanque, inicialmente vacío con un flujo constante y sale con un flujo variable a través de una tubería colocada en la parte inferior del tanque. Sabiendo que se tiene una tubería de seguridad en el interior del tanque a una altura ($h=2$ ft). Determinar el tiempo que ha de transcurrir para que el nivel del agua alcance la altura de seguridad y fluya de forma constante alcanzando un estado permanente.

Modelización del problema: $z' = 0.06173 - 0.02519 \sqrt{z}$, $z(0) = 0$.

- Comprensión del problema con sus datos y



Unidades en
ft



unidades.

- Valoración de las hipótesis. Aceptamos la ley de Bernoulli
- Entender la derivada de la masa de agua en un instante t como la diferencia del flujo que entra

menos el flujo que sale en t .

- Comprender y analizar la ecuación diferencial resultante (modelo).
- Modificar el modelo cambiando algunos de los parámetros que intervienen en su formulación: hipótesis, unidades, leyes etc.

Experimentación:

- Visualice el resultado mediante la representación gráfica de la solución numérica.
- Construya una tabla con el tiempo antes y después de alcanzar la altura para diferentes pasos h de solución numérica (ej. 1,0.5,0.1 seg).

Tiempo (segundos)	55,1	55,2
Altura (feet-pies)	1,998	2,001

- Contraste los resultados numéricos del ordenador con los de su calculadora.

- Intente obtener una solución analítica, use si puede cálculo simbólico.

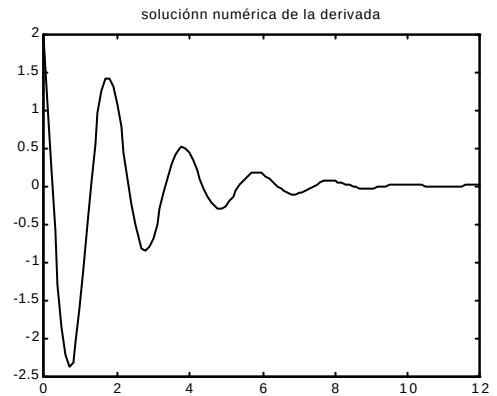
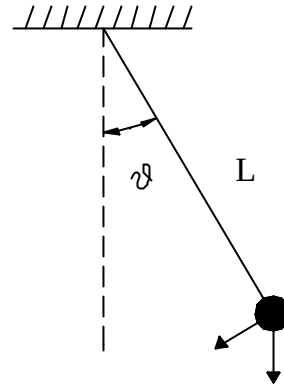
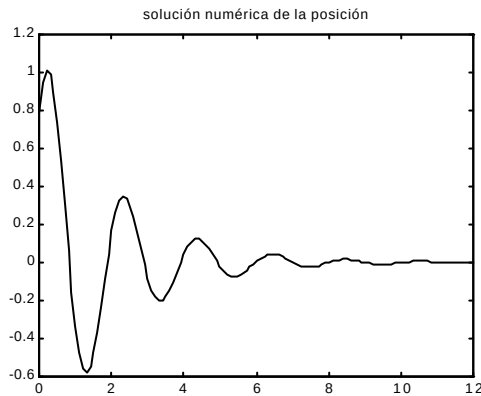
Errores más comunes de los alumnos:

- No distinguir con claridad la diferencia entre la solución numérica y analítica.

Problema 2: La figura del dibujo muestra un péndulo simple que oscila en un medio resistente. El péndulo está sometido a una fuerza resistente proporcional a la velocidad del mismo, el péndulo tiene una masa m y está sujeto con una cuerda rígida de longitud L .

Hallar y resolver las ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo ($J(t)$ $J'(t)$).

$$J'' = -J' - 9.8\text{sen}(J), \quad J(0) = p/4, \quad J'(0) = 2$$



Conclusiones de los alumnos:

- Tienes mas interés por la asignatura.
- Es una herramienta para resolver problemas de la vida real.
- Al tener la solución puedes analizar propiedades de distinto tipo.
- Ves la relación entre las matemáticas y la Ingeniería y viceversa.
- Ayudan a conocer mejor la calculadora y motivan a utilizarla.
- El trabajo es mas personalizado y se utilizan mas las tutorías.