

RELACIONES DE ORDEN EN LA TEORÍA DE LA DECISIÓN

M^a Carmen Escribano Ródenas
Gabriela M. Fernández Barberis

Dpto. Métodos Cuantitativos para Economía
Facultad CC. Económicas y Empresariales
Universidad San Pablo-CEU

1.- Introducción

La modelización de las preferencias constituye una etapa muy importante en el tratamiento de un problema de decisión.

Las preferencias se representan generalmente por una función, tanto en el caso determinístico como en el probabilístico, pero tal modelo representa serios inconvenientes. Nuestro objetivo consiste en presentar los conceptos y modelos que frecuentemente aparecen, los cuales constituyen la base de la mayoría de las aplicaciones al mundo real.

2.- Definiciones básicas

2.1- Relaciones Binarias

Sea A un conjunto. Una relación binaria S sobre A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.

Para cada par $(a,b) \in A \times A$, se dice que

$$aSb \Leftrightarrow (a,b) \in S$$

$$a \sim Sb \Leftrightarrow (a,b) \notin S$$

La relación binaria S definida sobre A puede satisfacer una o más de las propiedades siguientes:

Reflexiva (R): Si aSa , $\forall a \in A$

Irreflexiva (I): Si $a \sim Sa$, $\forall a \in A$

Simétrica (S): Si $aSb \Rightarrow bSa$, $\forall a, b \in A$

Antisimétrica (A): Si $aSb \Rightarrow b \sim Sa$, $\forall a, b \in A / a \neq b$ (es decir si aSb y $bSa \Rightarrow a = b$)

Asimetría (As): Si $aSb \Rightarrow b \sim Sa$, $\forall a, b \in A$

Transitiva (T): Si aSb y $bSc \Rightarrow aSc$, $\forall a, b, c \in A$

Completitud (C): $\forall a, b \in A / a \neq b \Rightarrow aSb$ ó bSa

Completitud fuerte (Cf): $\forall a, b \in A \Rightarrow aSb$ ó bSa

Una relación binaria puede satisfacer varias de estas propiedades simultáneamente, y toma su nombre si la verifica, es decir se dice que una relación es reflexiva si verifica la propiedad reflexiva, o se dice que una relación es fuertemente completa si verifica la propiedad de la completitud fuerte. Además, se verifican algunas implicaciones entre ellas, por ejemplo la Asimetría implica la Irreflexividad y la Antisimetría, y la Completitud Fuerte es Reflexiva y Completa. La tabla siguiente muestra los nombres de tipos de relaciones más usuales que utiliza la Teoría de la Decisión.

Tipo\Propiedad	R	S	T	As	A	C	Cf
Equivalencia	Si	Si	Si				
Cuasi-Orden (Preorden parcial)	Si		Si				
Orden débil (preorden completo)			Si				Si
Orden total (completo)			Si		Si		Si
Orden total estricto			Si	Si		Si	
Orden parcial	Si		Si		Si		
Orden parcial estricto			Si	Si			

2.2.- Relaciones de Equivalencia y de Orden

La equivalencia permite establecer nuevas consideraciones importantes, como el concepto de “clase de equivalencia”. El conjunto finito o infinito de elementos de un conjunto A equivalentes al elemento a , tal que $a \in A$, determina la clase de equivalencia de a , y puede designarse por la notación $S(a)$. También se dice que a es un representante de la clase de equivalencia. Se puede probar fácilmente que dos elementos cualesquiera de una clase de equivalencia son equivalentes entre sí, y que dos clases de equivalencia con un elemento

común son dos conjuntos idénticos. Estas propiedades llevan a probar el siguiente teorema fundamental: “Una relación de equivalencia definida sobre un conjunto A determina una partición del conjunto A en clases de equivalencia”. Finalmente, el conjunto de las clases de equivalencia determinado en un conjunto A por una relación de equivalencia S, se denomina conjunto cociente de A por S, y se designa con la notación A/S. Dentro de las relaciones de orden, merece la pena resaltar la importancia de que dos elementos estén relacionados o no para poder compararlos (orden total) o decir que son incomparables (orden parcial).

2.3.- Estructuras de preferencia

Se definen así a las estructuras que surgen en un conjunto A, donde hay definidas dos o más relaciones binarias. Sean S1, S2 y S3 tres relaciones binarias en el conjunto A. Se definen las relaciones S1US2 y S3* como dos nuevas relaciones binarias en el conjunto A, de la forma:

$$a(S1US2)b \Leftrightarrow aS1b \text{ o bien } aS2b, \forall a, b \in A$$

$$a S3^* b \Leftrightarrow bS3a, \forall a, b \in A$$

Preorden (S1, S2) Con S1 Transitiva y Antisimétrica, S2 es una relación de equivalencia en A, y además $\forall a, b \in A \Rightarrow a S1 b \text{ ó bien } b S1 a \text{ ó bien } a S2 b$

Preorden parcial (S1, S2) es un Preorden y existe al menos un par (a,b) $\in A \times A$ tales que $a \sim S1 b$ y $b \sim S1 a$; y $a \sim S2 b$ y $b \sim S2 a$

Semiorden (S1, S2) Con S2 reflexiva y simétrica y además se verifica que

i) $\forall a, b \in A / aS1b \text{ ó bien } bS1a \text{ ó bien } aS2b$ (fuertemente completa)

ii) Si $aS1b, bS2c$ y $cS1d$ entonces $aS1d, \forall a, b, c, d \in A$ (Semitransitiva)

iii) Si $aS1b, bS1c$ y $aS2d$ entonces $dS1c, \forall a, b, c, d \in A$ (Propiedad de Ferrers)

Orden de Intervalos (S1, S2) Con S2 reflexiva y simétrica y además se verifica que

i) $\forall a, b \in A / aS1b \text{ ó bien } bS1a \text{ ó bien } aS2b$ (fuertemente completa)

ii) Si $aS1b, bS1c$ y $aS2d$ entonces $dS1c, \forall a, b, c, d \in A$ (Propiedad de Ferrers)

Pseudo-Orden (S1, S2, S3) Con S2 reflexiva y simétrica, $S3=S1US2$, y además se verifica que

i) $\forall a, b \in A / aS1b \text{ ó bien } bS1a \text{ ó bien } aS3b \text{ ó bien } bS3a \text{ ó bien } aS2b$

ii) (S3, S2) es un semiorden

iii) (S1, S3US3*) es un semiorden

iv) $\forall a, b, c, d \in A$, se cumple que :

Si $aS1b, bS2c$ y $cS3d$ entonces $aS1d$ (es decir $S1S2S3 \subset S1$)

Si $aS3b, bS2c$ y $cS1d$ entonces $aS1d$ (es decir $S3S2S1 \subset S1$)

Si $aS1b, bS3c$ y $cS2d$ entonces $aS1d$ (es decir $S1S3S2 \subset S1$)

Si $aS2b, bS3c$ y $cS1d$ entonces $aS1d$ (es decir $S2S3S1 \subset S1$)

3.- Conceptos básicos utilizados en la modelización de las preferencias

Analizaremos cómo se utilizan las relaciones binarias para definir algunos conceptos básicos de la modelización de las preferencias del decisor.

3.1 La función de valor o función criterio

El modelo más frecuentemente utilizado es el de la función de valor $g: A \rightarrow R$

Que asigna a cada elemento del conjunto A un número real, de forma que permita comparar las alternativas del conjunto A. Es decir, a partir de la función g se establecen las relaciones binarias P (Preferencia estricta) e I (Indiferencia) de la forma siguiente:

$$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b), \text{ para cualesquiera } a, b \in A \text{ (" es estrictamente preferida a ")}$$

$$a I b \Leftrightarrow g(a) = g(b), \text{ para cualesquiera } a, b \in A \text{ (" es indiferente a ")}$$

Este modelo es el que se aplica fundamentalmente en la mayoría de los problemas de optimización en Investigación Operativa. Los usuarios de este modelo no siempre son conscientes de las propiedades que lleva implícitas en las relaciones de preferencia, ya que la pareja de relaciones (P,I) constituye un preorden completo.

3.2 La Transitividad de la Indiferencia

Veamos el clásico ejemplo de la taza de café, para ver la importancia de que algunas relaciones de indiferencia sean intransitivas. Es obvio que un individuo siempre va a saber decidir entre dos tazas de café cual de ellas tiene un único terrón de azúcar y cual de ellas tiene cuatro. Sin embargo, supongamos el experimento consistente en preparar 401 tazas de café con $(1 + 0,0i)p$ gramos de azúcar la taza i-ésima, donde $i=0,1,2,...,400$, y p es el peso en gramos de un terrón de azúcar. Es evidente que un individuo cualquiera será indiferente entre la taza i y la taza i+1, para todo i, pero no será indiferente entre la primera taza y la última. Entre los psicólogos, es muy utilizado el término “preferencia” para indicar cuál de dos alternativas es más fuerte o pesada que la otra, después de haberlas comparado, sin embargo es difícil elegir o preferir entre dos alternativas con “un gramo” de diferencia en el peso total de varios gramos, y se puede observar como el individuo se queda indiferente ante las dos alternativas. Ciertamente se podría decir que existen, actualmente, instrumentos técnicos que permiten discriminar entre dos alternativas con diferente “peso”, sin embargo el hombre no es capaz de realizar dicha diferenciación, aunque todos tácitamente

digamos que es posible eliminar siempre la intransitividad de la indiferencia con el uso de herramientas de medida, no humanas, más refinadas tecnológicamente.

El ejemplo anterior permite aceptar la posible intransitividad de la indiferencia, introduciendo umbrales de indiferencia q , en los modelos matemáticos de preferencia, que sean el límite superior por debajo del cual está la zona de indiferencia, (siendo q una función real de las alternativas $q: A \rightarrow R^+$). Estos umbrales pueden ser constantes si el conjunto de alternativas es finito o numerable y variables en caso contrario. Así podemos definir las relaciones de preferencia e indiferencia de la forma siguiente:

$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(b)$, para cualesquiera $a, b \in A$

$a I b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(b)$ ó bien $g(b) \leq g(a) + q(a)$, para cualesquiera $a, b \in A$

Donde $[q(a) - q(b)]/[g(a) - g(b)] \geq -1$, para cualesquiera $a, b \in A$

Se puede comprobar que la pareja de relaciones (P, I) tiene estructura de Semiorden.

3.3. La Comparación de Intervalos

Los modelos previos suponen que la comparación de las alternativas a y b del conjunto A conducen a la comparación de los números $g(a)$ y $g(b)$. En muchas aplicaciones, estos números no se conocen con precisión y se reemplazan por intervalos $[g(a), g(a)+q(a)]$ y $[g(b), g(b)+q(b)]$, donde los umbrales de indiferencia no son constantes, sino que dependen de las alternativas, definiendo ahora las relaciones de preferencia e indiferencia como

$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q(b)$, para cualesquiera $a, b \in A$

$a I b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(b)$ ó bien $g(b) \leq g(a) + q(a)$, para cualesquiera $a, b \in A$

Se puede comprobar que la nueva pareja de relaciones (P, I) así obtenida, tiene estructura de Orden de Intervalos.

3.4.- La Incomparabilidad

La complejidad de las consecuencias de algunas alternativas puede sugerir que su comparación sea definitiva o imposible por el momento. La relación de incomparabilidad R , que se confunde algunas veces con la Indiferencia, aparece en los conceptos de preorden parcial (con las mismas propiedades que el preorden completo, excluyendo la reflexiva) y orden parcial (preorden parcial donde si $a \neq b$ entonces a no es indiferente con b) y puede definirse de la forma: $a R b \Leftrightarrow a \sim Pb$ y $b \sim Pa$ y $a \sim Ib$, para cualesquiera $a, b \in A$

Es importante señalar que la definición de semiorden parcial tiene en cuenta simultáneamente la intransitividad de la indiferencia y la posibilidad de la incomparabilidad.

3.5- La Preferencia Débil

Puede ocurrir que el decisor dude entre preferencia estricta e indiferencia, debido a la falta de información ó bien porque algunas preferencias sean más fuertes que otras. Esta situación puede presentarse mediante una relación Q , denominada Preferencia Débil. En los modelos matemáticos se introducen dos umbrales de indiferencia q y p (funciones reales positivas definidas en el conjunto de alternativas, $q: A \rightarrow R^+$ y $p: A \rightarrow R^+$) tales que $0 \leq q(a) \leq p(a)$ para cada $a \in A$, definiendo las relaciones binarias como

$a P b \Leftrightarrow g(a) > g(b) + p(b)$, para cualesquiera $a, b \in A$

$a Q b \Leftrightarrow g(b) + p(b) \geq g(a) > g(b) + q(b)$, para cualesquiera $a, b \in A$

$a I b \Leftrightarrow g(a) \leq g(b) + q(b)$ ó bien $g(b) \leq g(a) + q(a)$, para cualesquiera $a, b \in A$

siendo además $[q(a) - q(b)]/[g(a) - g(b)] \geq -1$ y $[p(a) - p(b)]/[g(a) - g(b)] \geq -1$

La terna (P, I, Q) constituye así definidas un pseudo-orden.

4.-Conclusiones

La utilización de unas propiedades u otras dan lugar, como hemos visto a una nueva rama de la Ciencia, que intenta ayudar a los decisores a elegir la mejor solución a su problema, dentro de un conjunto de alternativas posibles, o a "ordenarlos" según ciertas preferencias.

Los conceptos que hemos desarrollado anteriormente son básicos y sencillos y sin embargo las relaciones binarias no están contempladas en los planes de estudio de las actuales Educación Primaria, Educación Secundaria, ni siquiera en los Bachilleratos (ni el antiguo B.U.P, ni en los nuevos Bachilleratos LOGSE). En la Universidad estos conceptos sólo son estudiados y analizados en las asignaturas donde son utilizados posteriormente en alguna técnica concreta. Sin embargo en el antiguo plan de estudios de 1.957, las relaciones binarias, se explicaron, a nivel elemental, en el curso de Orientación Universitaria, durante algún tiempo.

Actualmente en la Teoría de la Decisión se emplean como hemos visto todas las posibles propiedades de las relaciones binarias para establecer modelos matemáticos que se pueden utilizar posteriormente en la Economía, en el Medioambiente, en Financiación, en Medicina, en Psicología,..., y en general, en cualquier situación de la vida cotidiana donde se deba realizar una toma de decisiones.

BIBLIOGRAFÍA

- ALCAIDE (1973): *Matemática Moderna para Economistas. Álgebra Lineal*. Biblioteca de Ciencias Sociales. Aguilar.
- CALVO MARTÍN, M.E.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M.; ESCRIBANO RÓDENAS, M.C. (1997): "La evolución histórica de la Decisión Multicriterio". *Actas del XX Congress of History of Science*. Lieja (Bélgica). (En prensa).
- CALVO MARTÍN, M.E.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M.; ESCRIBANO RÓDENAS, M.C. (1997): "La modelización de las preferencias del decisor en su aplicación a problemas de decisión Multicriterio". *Actas V Jornadas de ASEPUMA*; pp. 169-182. Málaga.
- CHANDON, J.L.; VINCKE, PH. (1981): "La modelisation de preferences". En: *Analyse et Aggregation des Preferences*. Batteau et al. *Económica*, pp.15-43. París.
- ESCRIBANO RÓDENAS, M.C.; CALVO MARTÍN, M.E.; FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M. (1996): "El pasado, el presente y el futuro de la Investigación Operativa: El espacio de libertad del decisor". *Actas de la X Reunión ASEPELT – España*. Albacete.
- FERNÁNDEZ BARBERIS, G.M. (1993): "New Preference Structures for Multiple Criteria Decision Making: its Extension to PROMETHEE Methods". *Central European Journal for Operations Research and Economics*. Vol.2, Nº1, pp .23-53. PROFIS Publishing House, Bratislava.
- FICHEFET, J. (1985): "Data Structures and Complexity of Algorithms for Discrete MDM Methods", en: *Multiple Criteria Decision Methods and Applications*. Fandel, G. And Spronk. J. (Eds.). Capítulo 10. Springer Verlag.
- JAMISON, D.T.; LAU, L.J. (1973): "Semiordeers and the Theory of Choice", *Econométrica*, 41, 5, 901-912.
- LUCE, R.D. (1956): "Semiordeers and a Theory of Utility Discrimination", *Econométrica*, 24, 178-191.
- ROUBENS, M.; VINCKE, Ph. (1988): *Preference Modelling*, Springer Verlag.
- ROY, B. (1973): "How Outranking Relation Helps Multiple Criteria Decision Making", en: *Multiple Criteria Decision Making*. Cochrane, J.L. and Zeleny, M. Pp. 179-201. University of South Carolina Press. Columbia USA.
- ROY, B. (1977): "Partial Preference Analysis and Decision-aid: The Fuzzy outranking relation Concept", en *Conflicting Objectives in Decisions*, Bell, D.E. et al (Eds.), pp. 40-76. Wiley.
- ROY, B. (1977): "A conceptual framework for a prescriptive theory of decision aid", en: STARR, M.K.; ZELENY, M.(Ed.), *Multiple Criteria Decision Making*, North-Holland, Amsterdam, 179-210.
- ROY, B.; VINCKE, Ph. (1981): "Multicriteria Analysis: survey and new directions". *EJOR* 8. North Holland.
- ROY, B.; VINCKE, Ph. (1984): "Relational systems of preference with one or more pseudo-criteria: some new concepts and results", *Management Science*, 30, 11, 1323-1335.
- ROY, B.; VINCKE, PH. (1987): "Pseudo-orders: definition, properties and numerical Representation". *Mathematical Social Sciences*, 14; pp.263-274. North Holland.
- ROY, B. (1990): "Decision-aid and decision making", *EJOR* 45, pp. 324-331. North Holland.
- TVERSKY, A. (1969): "Intransitivity of preferences", *Psychological Review*, 76, 1, 31-48.
- VINCKE, PH. (1980): " Vrais, quasi, pseudo et précritère dans un ensemble fini: Propriétés et Algorithmes". Université de Paris-Dauphine, Cahier du LAMSADE, Nº 27.
- VINCKE, Ph. (1981): "Preference Modelling: A survey and an experiment", en: BRANS, J.P. (Ed.), *Operational Research'81*, North-Holland, 341-354.
- VINCKE, Ph. (1982): "Aggregation of preferences: a review". *EJOR* 9; pp. 17-22. North Holland.
- YAMANE, T. (1983): *Matemáticas para Economistas*. Editorial Ariel.