

EL INFINITO A LOS 16

Antonio Belmonte Martínez

I.E.S. “Ros Ginér”, Lorca-Murcia

José Luis Belmonte Martínez

I.E.S. “Juan Gris”, Móstoles-Madrid

Sobre la historia.

Desde que Zenón en el siglo V a.C., haciendo uso de un proceso infinito, pusiese en duda el movimiento con sus aporías y dos siglos después Arquímedes, más práctico, utilizase una suma infinita para averiguar áreas y volúmenes, la idea del infinito ha recorrido a veces intermitentemente, la historia de la filosofía y de las matemáticas hasta la actualidad, hallándose indisolublemente unida al Análisis y a la Teoría de Conjuntos.

Podemos rastrear brevemente esta trayectoria tortuosa en algunos momentos, enriquecedora en la mayoría de las ocasiones y vibrante siempre. Zenón introdujo tres problemas: lo infinitesimal, el infinito y la continuidad. La noción de infinitésimo fue utilizada por los griegos con el fin de acercarse sigilosamente al círculo mediante polígonos de un gran número de lados y sustraerle su “irracional” esencia. Pero lo infinitamente pequeño no era evidentemente igual a cero, ya que una suma considerable de infinitésimos podía dar un todo finito ...

Un asunto como este no podía permanecer ajeno a la Física y, desde luego, a la Filosofía. Sin los infinitésimos no habría dos instantes realmente consecutivos. Sin embargo, puestos a desmenuzar algún trozo de materia, siempre es posible imaginar un cierto tamaño para las partículas “más pequeñas”. Pero, rizando el rizo, un conjunto finito de píxeles en la pantalla de un monitor puede dar lugar a que dos rectas que se cortan no tengan ningún punto en común (!)¹.

Durante la interminable Edad Media, el conocimiento científico queda empapado de estéril discusión teológica, y así Tomás de Aquino se empeña en asociar el infinito casi exclusivamente a Dios dejando una larga estela de influencia metafísica en el tratamiento del tema. Descartes no se queda a la zaga y hemos de esperar a que Spinoza dote de cierta materialidad al concepto.

Los infinitésimos sobreviven hasta el siglo XVII y XVIII para asistir al brillante ser que por entonces ve la luz: el Análisis. Los griegos recelosos de los procesos infinitos habían omitido el paso al límite librando a la intuición de males mayores... pero claro, sólo durante algún tiempo. La herencia de Kepler y Galileo recogida fundamentalmente por Newton lleva, como casi todas las herencias, letra pequeña y el heredero para continuar con la magna obra debe improvisar herramientas. Leibniz participa en esta labor y entre ambos construyen un poderoso edificio sin cimientos. Los infinitésimos de los que habían renegado los griegos se acaban de colar por la puerta de atrás. Evidentemente ni Newton ni Leibniz duermen tranquilos. Así este último se explaya con su típico desparpajo metafísico admitiendo el problema:

Será suficiente si, cuando hablamos de... cantidades infinitamente pequeñas (esto es, lo mínimo que podemos conocer), entendemos cantidades que son... indefinidamente pequeñas.

Si alguien quiere entender éstas, como las cosas últimas, ... lo puede hacer..., aún cuando piense que tales cosas son absolutamente imposibles; será suficiente utilizarlas como una herramienta que presenta ventajas de cálculo, de la misma manera que el estudioso del álgebra retiene raíces imaginarias con gran provecho.

Por supuesto que siempre hay avisados que se aprovechan en los momentos de debilidad y el obispo anglicano George Berkeley no perdió la oportunidad de ello en su agudo ensayo *The Analyst*:

¿Y qué son las fluxiones?. Velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y qué son estos incrementos evanescentes?. No son cantidades finitas ni cantidades infinitas pequeñas ni tampoco nada. ¿No podríamos llamarlas los fantasmas de cantidades difuntas...?

.....

¿No son corrientes entre los analistas ciertas máximas que chocan al buen sentido?. Y, ¿no se cuenta entre ellas el supuesto común de que una cantidad finita dividida por nada es infinita?...

Pero, afortunadamente, aunque parece que en realidad la auténtica misión de un matemático es crear nuevos

¹ Por cierto, que el matemático francés J.P. Reveillé ha hecho uso del Análisis no estándar para convertir la pantalla discreta de un monitor en una retícula discreta, pero “infinita”, de píxeles infinitesimales (!).

problemas, esporádicamente va resolviendo algunos ya viejos (recuérdese el último de Fermat). En 1821, Cauchy introduce la noción de “límite” y destierra lo “infinitamente pequeño”. Bien es cierto que lo sustituyó por aquello de “aproximarse todo lo que queramos a ...”, pero de esta manera eludía el preciso instante en que se alcanzaba el límite. Aún así, “aproximarse a ...” no dejó satisfecho durante mucho tiempo al gremio y vino Weierstrass, profesor de enseñanza secundaria hasta avanzada edad, a culminar la obra con sus “deltas y epsilon”. Ya no hay cantidades que se muevan hacia otras. Así llegó el rigor al Análisis y se liberó de cualquier dependencia de la geometría (punto $\leftrightarrow$ número), del movimiento y de traiciones de la intuición varias.

Ahora bien, todo el trabajo anterior presupone una idea: la de número real. Esta idea fue obviada por casi todos en la desenfadada carrera por el rigor. Tal es así, que se cuenta que tras presentar Cauchy su trabajo sobre convergencia de series, Laplace se marchó precipitadamente a casa donde permaneció aislado hasta comprobar que todas las series de su *Mécanique Céleste* eran convergentes. No fue sólo una anécdota. Escribía Abel en 1825:

Las series divergentes son la invención del diablo, y es una vergüenza basar en ellas cualquier demostración, sea la que fuere...

Encararse con el estudio de los números reales traería consecuencias insospechadas. El hecho de descubrir que jugársela “a racional” en una ruleta con los números reales del 0 al 1 es suicida no es del gusto de nadie. Dedekind encabezó la cruzada definiendo un número real con un conjunto infinito de números racionales y con ello puso la “primera piedra” del continuo.

La noción de conjunto parecía ingenua e improductiva. Nada más lejos. Cantor, al definir la equivalencia de conjuntos abrió una brecha profunda pues atentaba directamente contra el “infinito potencial” que tradicionalmente, y en mayor o menor medida, se había aceptado. La equivalencia de conjuntos le permitió definir y clasificar los conjuntos infinitos y establecer el tipo de infinito a que responden los naturales, $\aleph_0$, y los reales, $\mathfrak{c}$, relacionados por la expresión:

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

que corresponde precisamente a la potencia del continuo.

Este intento de abarcar el mar con las manos no quedó impune y amén de las impertinentes acusaciones de Kronecker, propias de su humor, Henri Poincaré tranquilizaba a sus lectores, en 1908, con un mensaje nada halagüeño para Cantor:

Las generaciones posteriores contemplarán la teoría de conjuntos como una enfermedad de la que nos hemos recuperado.

David Hilbert salió en defensa de la criatura:

Nadie podrá sacarnos del paraíso que Cantor ha creado para nosotros.

Pero, en realidad, todas estas manifestaciones no significaban otra cosa que la interdependencia milenaria de la filosofía y las matemáticas. Ahora eran el formalismo y el intuicionismo las corrientes que se batían descarnadamente.

Esta controversia creada por la teoría de conjuntos tenía su origen en las llamadas paradojas, delicado eufemismo para profundas contradicciones que se acuñó para intentar salvar algo más que las apariencias. Las primeras y más inquietantes fueron observadas por Bertrand Russell y detrás de todo ello se hallaba el axioma de elección aplicado incautamente por Cantor para demostrar que todo conjunto infinito contiene un subconjunto cuyo número cardinal es $\aleph_0$. La discusión giró entorno a la legitimidad de construir un conjunto a partir de otros sin especificar la ley de elección. Borel afirmaba que sin tal especificación la ley sería un acto de fe, lo cual quedaba fuera de las matemáticas.

Del centro de este torbellino creado por el concepto de infinito, el axioma de elección y las inoportunas paradojas, emergía la eterna cuestión de saber en qué sentido existen los conceptos matemáticos: ¿debe existir una correspondencia con realizaciones materiales o simplemente son idealizaciones de estas?.

La medida que se adoptó para impedir el naufragio de la teoría intuitiva de Cantor fue la axiomatización², excluyendo aquellas clases de las que se derivasen contradicciones, recurso habitual utilizado por los

² Que fue emprendida por Zermelo y mejorada por Fraenkel y von Neumann.

profesionales del ramo hasta que hubo que pedir permiso a Gödel... Pero esta es ya otra historia. Hemos viajado por el “antes de Gödel”, el “después” es demoledor pero no menos apasionante.

Sobre los alumnos.

Pero ¿qué arraigo tiene un concepto como infinito en las mentes de nuestros alumnos?. ¿Podemos medir de alguna manera la transición de dicho concepto a lo largo de su formación en un centro de educación secundaria?. ¿Cuál es el grado de asimilación al comenzar sus estudios universitarios?... Hemos pretendido hallar respuesta a algunas de estas cuestiones mediante la realización de un *sencillo* test que han respondido más de quinientos alumnos entre 14 y 18 años de diversos I.E.S. El cuestionario, que aparece en el *Apéndice*, por ser abierto, presenta como inconveniente un cierto grado de subjetividad en la interpretación de las respuestas pero esto es compensado por la riqueza de las mismas que nos han aportado perspectivas y datos imprevistos. El ineludible plazo de entrega de este artículo nos impide ofrecer una síntesis rigurosa de los resultados³, pero sí podemos establecer ya algunas conclusiones evidentes. Así, por ejemplo, el cálculo de un término avanzado de la sucesión no presenta mayores dificultades para ninguna de las edades consideradas, si bien muchos de ellos prefieren emprender dicho cálculo término a término sin reparar en la ley que los genera. El número de alumnos que justifica la determinación de a_{20} mediante el término general es nulo hasta los 15/16 años, como era de esperar por no conocer dicho concepto, pero aún es muy bajo en cursos superiores, lo que parece indicar una eterna resistencia a la abstracción (¿?). Hemos observado, por otra parte, una gran dificultad en observar la aproximación de los términos de la sucesión hacia un límite. ¿Un cierto vértigo a aceptar la infinitud que, sin embargo, reconocen en los puntos suspensivos?. La división por cero con todos sus posibles resultados es uno de esos tópicos de la enseñanza de las matemáticas, como bien es sabido por todos nosotros. Los más jóvenes manifiestan un razonable empeño en interpretar dicha expresión como un reparto, lo que les lleva a dar respuestas del tipo: “0, porque tomar 7 partes de nada es igual a nada”, o “0, porque 7 caramelos para nadie no tocan a nada”. ... Algunos rozan el “chispazo” diciendo que “da 0 porque ningún número por 0 da 7”. En cambio, los alumnos mayores han adquirido la incontrolada -como debemos admitir- costumbre de recurrir a la calculadora como oráculo indiscutible y ello les lleva a responder “0, porque da error”, o bien la hueca frase aprendida de “No existe porque no se puede dividir por 0”.

La definición del infinito, al margen de exquisitas respuestas mas o menos originales, se reparte entre la representación de un número muy grande y la idea de ilimitado o incluso indefinido: “Para mi el infinito significa el que algo no tiene fin. Por ejemplo, el número más grande del mundo + 1” (Jonathan, 15 años) o bien “Infinito significa que no tiene fin, por ejemplo $100/3=33,333$ Te podrías tirar toda la vida pensando pero siempre saldrá 3” (Vicente, 13 años).

Sobre el infinito.

Hay infinitos que parecen abarcables como

$$1/7=0.142857142857...$$

y otros no tanto como

$$P=3.14159265358979...$$

aunque nos empeñemos en mutilarlo con fines prácticos, pero ambos se introducen en nuestras vidas cuando aún no hemos acabado de jugar y de aprender a contar... precisamente con N.

El resultado de

$$0.5353...+0.6666...$$

se enseña como algo trivial pero resulta que incluso algunas calculadoras tiene “problemas” para hallarlo.

Y todavía hay quienes piensan que

$$0.9999...=9/9$$

se puede consumir sin riesgos de indigestión.

Si consideramos que estos lances con cantidades infinitas no son motivos suficientes para la reflexión, sólo tenemos que pensar en el instante excepcional en que uno cualquiera de nuestros alumnos, calculadora en ristre,

³ Los cuales se presentarán en la comunicación correspondiente del próximo mes de septiembre.

realiza por primera vez en su vida, y consciente de ello, la operación de dividir por cero. No debemos perder la oportunidad de observarlo, de vivirlo, de sentir el fulgor de un rostro incrédulo y... finalmente de escuchar contra su voluntad aquello de “da cero profe”. Muy poco tiempo después lo sublime alcanza la cumbre cuando se les solicita que “calculen la suma de los **infinitos términos** de una progresión geométrica de razón $2/3$ y cuyo segundo término es 6 ”⁴... Luego vendrán el $0 \cdot \infty$ que no da 0 y el 1^∞ que no da 1, las asíntotas, etc.

Hemos de definir el problema. Puesto que consideramos inevitable e imprescindible la introducción del concepto de infinito en este tramo de la enseñanza, podemos plantearnos algunas cuestiones. ¿En qué términos debemos o, más correctamente, podemos hacerlo?, es decir, ¿con qué grado de rigor?, ¿a qué edad?, ¿cómo abordaremos los primeros conatos del infinito en los cursos inferiores?, ¿cómo podemos actuar para evitar que se adquieran preconceptos erróneos?, ¿es posible utilizar actividades no sólo motivadoras sino que también ilustren adecuadamente la idea del infinito?, ¿puede ayudarnos la geometría a ello?, ...

Intentar compartir estas cuestiones y algunas otras ha sido, a la postre, lo que nos animó a realizar este pequeño trabajo.

Abril, 1999

Apéndice: *Test sobre el infinito*

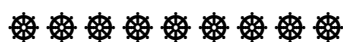
Nombre y apellidos :..... Curso :..... Edad :.....

1. Considera la siguiente colección de números: **$3/5$, $4/6$, $5/7$, $6/8$,**

- a) ¿Qué significan los puntos sucesivos?. ¿Cuántos números crees que vienen a continuación de esos cuatro?.
- b) ¿Qué número se hallará en el quinto lugar?, ¿y en el vigésimo?. Explica cómo lo has obtenido.
- c) ¿Cómo evolucionan estos números: crecen o decrecen?. ¿Crees que se acercan a algún número concreto?. Si tu respuesta es afirmativa, dí a cuál y cuándo se llegará a dicho número.

2. ¿Cuánto crees que da $7/0$?. Justifica tu respuesta. (Si intentas resolverlo con la calculadora, interpreta el resultado que obtienes).

3. Intenta describir qué significa para ti “infinito”.



⁴ Ejercicio elegido de un texto cualquiera de 4º curso de E.S.O. de una editorial cualquiera.