

PROYECTOS MATEMÁTICOS Y TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

Jesús Bondia, Carme Chalaux,
Pedro Cobo, Jordi Comellas,
Joaquim Giménez (asesor), Jaume Serra,
Manel Sol, Carles Subies, Xavier Vilella.
Grupo Vilatzara

1. Introducción

La implantación del nuevo sistema educativo plantea, entre otras cosas, una reorientación de todas las áreas y, evidentemente, de la de matemáticas. Esta reorientación viene dada por la exigencia de los principios generales que presiden a este modelo educativo: la integración de los ciudadanos y el máximo desarrollo de sus capacidades. Para ello se da a las matemáticas un carácter funcional y se las concibe como una herramienta útil de aproximación y comprensión del entorno y de la sociedad que nos rodea; se espera que los alumnos y las alumnas las usen de manera creativa e incluso que puedan extraer algún modelo matemático de la observación de situaciones cotidianas.

Este planteamiento aparece recogido en las orientaciones generales que se dan para la área de matemáticas en el decreto que ordena el modelo en Cataluña (Decreto 96/1992). Este planteamiento, muy interesante para las matemáticas, nos plantea tres problemas: cómo llevarlo a la práctica, qué cambios nos exige y de qué medios disponemos.

En la ordenación del modelo educativo en Cataluña se contempla dos momentos en los que se espera que el alumnado muestre hasta qué punto ha alcanzado estos objetivos y es capaz de aplicarlo y mostrarlo. Estos momentos son los Créditos de Síntesis (ESO) y los Trabajos de Investigación (Bachillerato).

¿Cómo organizar nuestros cursos de manera que el alumnado aprenda los contenidos procedimentales, conceptuales y actitudinales integrándolos desde esta perspectiva crítica y de funcionalidad que venimos resaltando?

Nos preguntamos si la dinámica de aprendizaje en el aula permite alcanzar estos objetivos. La respuesta es que no del todo. Por más que hemos pensado y probado de reorientar las actividades de aula, éstas siempre tienen un alcance limitado. Creemos que para que el alumnado aprenda realmente a usar las matemáticas para comprender mejor situaciones de su entorno, para hacer observaciones, para recoger datos, para reflexionar y modelizar, precisa de actividades específicas a estos fines que no son las que se dan normalmente en el aula. En la ESO donde mejor se recogen estas actividades es en los Proyectos Matemáticos y en las Actividades de Investigación y en el Bachillerato es en los Trabajos de Investigación.

A lo largo de estos últimos años nuestro grupo ha trabajado en el diseño de un curriculum que contemple este tipo de actividades de manera planificada.

2. La investigación en la ESO

Los Proyectos Matemáticos son actividades desarrolladas normalmente fuera del aula en tiempo no lectivo (o por lo menos una buena parte) en las que: *a)* se recogen situaciones de la vida real, próximas al alumnado, que permiten pequeñas investigaciones —establecer y contrastar hipótesis, buscar secuencias, etc.—; *b)* la situación problemática planteada no ha de tener solución única y ésta tampoco se ha de obtener por aplicación de procedimientos rutinarios, sino que ha de admitir diferentes estrategias y destrezas para encontrarlas; *c)* el alumnado ha de buscar información, seleccionarla, manipularla, clasificarla, ordenarla, interpretarla, planificar estrategias, relacionar, tomar decisiones, hacer deducciones, generar nuevos datos; *d)* el alumnado ha de elaborar un informe donde se exponga todo el proceso seguido, y las conclusiones a las que se llega, usando diferentes tipos de lenguaje (algebraico, gráfico, estadístico, geométrico).

Las Actividades de Investigación son situaciones problemáticas más o menos reales, abiertas —sin respuesta única—, que permiten diferentes estrategias para resolverlas, pudiéndose llegar a una modelización de la situación presentada. Son más breves que los Proyectos Matemáticos, y la recogida de información no es tan extensa.

Al interés matemático ya destacado quisiéramos añadir la relación de este tipo de actividades con los contenidos actitudinales: *a)* el alumnado, normalmente, estará motivado para este tipo de actividades; *b)* le predispone favorablemente para otras actividades de este tipo, si las sucesivas experiencias son positivas (es decir, llega a algún resultado final correcto y, éste es valorado por el profesor/a); *c)* contribuye a mejorar la autoestima y la actitud hacia las matemáticas; y *d)* le permite ir adquiriendo confianza en los conocimientos matemáticos que ya posee y en sus propias capacidades.

3. La investigación en el Bachillerato: el Trabajo de Investigación

Pretende ser un trabajo en el que intervengan todos los elementos de una investigación. Tal como se describe en la normativa que lo regula (Departament d'Ensenyament, 1992):

El Trabajo de Investigación está constituido por un conjunto de actividades realizadas por los alumnos, estructuradas y orientadas a la investigación, sobre un ámbito escogido i acotado, en parte, por el alumnado. El objetivo del trabajo es que el alumnado use determinados procedimientos, y que lo haga en ámbitos que pueden ser diferentes de aquellos en los que los adquirió, profundizando sobre algún tema de su interés. Han de ser actividades para consolidar y desarrollar capacidades de investigación, argumentación y expresión, aplicándolas a las diferentes materias del curriculum. Han de ser capaces de transferir conocimientos de un campo a otro.

4. Metodología de los trabajos de investigación en el bachillerato

Un trabajo de investigación compromete al alumnado y al profesorado en una tarea común de acuerdo con los objetivos generales oficiales (apartado 3). Estos objetivos se pueden conseguir siguiendo una metodología que permita involucrar a los alumnos y alumnas en la realización de investigaciones ricas y novedosas, y que sean, a la vez, de su interés.

4.1. Oferta de trabajos de investigación por parte del Departamento de Matemáticas

Pensamos que los alumnos y las alumnas han de recibir indicaciones generales iniciales que les orienten y les enganchen en la realización de trabajos de investigación en el Área de Matemáticas. Por tanto, el Departamento hará una oferta inicial basada más en ideas orientativas sobre ámbitos de investigación que en una lista de temas concretos.

Esta oferta ha de abarcar diferentes situaciones en las que las matemáticas estén presentes; por ejemplo, podemos proponer investigaciones que relacionen las matemáticas con las aficiones de alumnos y alumnas (tenis, baloncesto, astronomía, pesca, música, etc.), o que las apliquen al estudio de algunos aspectos de la ecología, la biología, el urbanismo, etc., como pueden ser: el ruido, el corazón, la contaminación atmosférica, la energía en el mundo, las epidemias, etc. Nuestra oferta también puede incluir el análisis de las matemáticas en las obras de arte (Durero, Gaudí, Escher, etc.). No hemos de olvidar tampoco en la oferta del Departamento al alumnado que más le gusta las matemáticas, a él podemos encaminarlo hacia la realización de diferentes modelizaciones de situaciones reales (el aterrizaje de un avión, la optimización del empaquetamientos, la regulación y duración de los semáforos, etc.).

En definitiva, nuestra idea inicial será la de orientar al alumnado hacia ámbitos de investigación que sean de su agrado para aumentar su disponibilidad y su autonomía, variables que consideramos importantes para la realización de un buen trabajo de investigación. Es evidente que si hay alumnos o alumnas que no tienen un interés marcado, podemos conducirlos hacia ideas que sean adecuadas a sus posibilidades.

4.2. Reflexiones iniciales con cada alumno o alumna

Para encontrar los ámbitos de trabajo de interés de los alumnos y las alumnas hemos de estar dispuestos a escuchar lo que nos dicen. Por ejemplo, José nos dijo un día que le gustaba la música y que le gustaría investigar sobre algo que la relacionara con las matemáticas. Lo primero que hemos de hacer en una situación así es reflexionar con él sobre si tiene alguna idea en la que pueda investigar. Esta reflexión será, al principio, general, con preguntas como: ¿qué querrías hacer?, ¿qué te interesa sobre la música?, ¿crees que la música tiene algo que ver con las matemáticas?, etc.

Si no sabemos sobre el tema nada que pueda ser interesante, trataremos de hablar con alguna persona experta, a ver si nos da alguna idea. Al mismo tiempo, incitaremos al alumno o alumna a que busque información en Internet (véase A. Pérez, 1998).

La continuación de la reflexión con José sería en términos más concretos: ¿has pensado que las simetrías y las composiciones musicales pueden estar relacionadas?, ¿sabías que los logaritmos están relacionados con la construcción de las escalas musicales?, ¿has pensado que las medidas de las cuerdas de una guitarra están relacionadas con las notas musicales?, ¿te interesa el piano?, ¿quieres investigar los matemáticos que tocan y/o tocaban el piano?, ¿eres un fanático del órgano?, ¿quieres analizar matemáticamente el órgano de tu pueblo?, ¿conoces los aparatos de afinación?, ¿quieres trabajar sobre las matemáticas y la afinación?, etc.

Puede ser que el mismo profesor o profesora conozca el tema sobre el que José quiere investigar, en este caso puede darle alguna referencia básica, o mostrarle algún trabajo sobre, por ejemplo, composiciones dodecafónicas i geometría. Pensamos que es importante mostrar al alumnado un trabajo de cursos anteriores para que vea cómo está hecho y qué le estamos pidiendo como resultado final; en cambio, ha de ser él o ella quien concrete el tema sobre el que quiere investigar.

La actuación del profesorado en esta fase del trabajo ha de ser orientativa para que la pregunta sobre la que se centre la investigación tenga un interés objetivo, independientemente de que sea del agrado del alumno o la alumna. Así pues, hemos de concienciar al alumnado de que se ha de involucrar en la búsqueda de información para concretar, primero, y empezar a desarrollar, después, el tema de investigación.

4.3. Guía del profesor o profesora

Involucrar a los alumnos y las alumnas en la búsqueda bibliográfica y en la concreción de la pregunta a investigar no han de ser los únicos compromisos del profesorado respecto a los trabajos de investigación, sino que, además, ha de llegar a concienciarse de que uno de los factores que mejora su función es el de profundizar en el conocimiento de las matemáticas y de sus relaciones con otras disciplinas, en especial las que más tienen que ver con la vida real que son, en definitiva, las que interesan a la mayoría del alumnado.

En este sentido, para facilitar la tarea del profesor o profesora hemos hecho una clasificación de los ámbitos de investigación en el Área de Matemáticas, agrupándolos en dos grandes bloques: los que tienen que ver sólo, o principalmente, con las matemáticas; y los que relacionan las matemáticas con otras disciplinas. Por lo que se refiere a los primeros, los hemos dividido, a su vez, en los que tratan sobre la *historia* de las matemáticas —Euclides, Pitágoras y su tiempo, etc.— y los que están relacionados con la obtención de resultados puramente matemáticos (*conceptualización*) —la sucesión de Fibonacci, la razón áurea, etc.—.

En cuanto a la relación de las matemáticas con otras disciplinas hemos diferenciado entre las investigaciones cuya finalidad es la de evidenciar la *relación* entre alguna (o algunas) rama de las matemáticas con otras disciplinas —las matemáticas en el tenis, en la pesca, etc.—; las que pretenden obtener resultados de otras materias por *aplicación* de herramientas matemáticas, se trata, en este caso, de aplicar modelos matemáticos ya elaborados para obtener los resultados que se buscan —generación de curvas de Escher o de composiciones musicales mediante transformaciones planas, etc.—; y las que su objetivo es la búsqueda de modelos matemáticos (*modelización*) que interpreten situaciones de la vida real —la distribución de farmacias en una ciudad, y otros ejemplos del apartado 4.1—.

Nuestro objetivo final es el de buscar una bibliografía básica que sirva al profesorado para iniciarse, para profundizar o simplemente para sugerirle ideas de la presencia de las matemáticas en la vida real. Para ello, hemos construido una tabla de doble entrada, pendiente de completar, de referencias bibliográficas básicas en la que las columnas corresponden a la clasificación de los ámbitos de investigación descritos en los dos párrafos anteriores y las filas a las diferentes disciplinas que hemos considerado —arquitectura y escultura; pintura, cerámica y bordados; naturaleza y medio ambiente; astronomía; educación para la salud y el consumo; música; mecánica; juegos y deportes, etc.—.

4.4. Planificación del trabajo de investigación

En este apartado seguimos la misma metodología de apartados anteriores, es decir, trataremos de “forzar” al alumno o a la alumna a que haga su propia planificación, manteniéndonos como orientadores de la misma. En cualquier caso, es interesante que cada profesor tenga su propio esquema de trabajo para que, en los momentos en que los alumnos no sepan establecer su plan, sea capaz de ayudarles con ideas sencillas de llevar a la práctica. En este sentido, un esquema de planificación podría consistir en dividir el trabajo en diferentes capítulos sobre los que se podría avanzar simultáneamente. Un ejemplo ilustrativo concreto sería dividir la investigación sobre la “generación de composiciones musicales mediante transformaciones geométricas”, en cuatro capítulos que podrían ser: *a)* la relación de las matemáticas con la música, que incluiría la lectura de alguna bibliografía básica (T. O’Shea, 1979); *b)* la trayectoria musical de Schoenberg y el sistema dodecafónico; *c)* las transformaciones geométricas del plano; y *d)* la generación de una composición musical.

4.5. Seguimiento y producción final

El seguimiento del trabajo de investigación se puede hacer mediante la realización periódica de entrevistas con el alumno o alumna, cuyos contenidos generales podemos resumir en los siguientes apartados: *a)* trabajo realizado; *b)* fuentes de información consultadas; *c)* intercambio de material; y *d)* propuesta de trabajo para la próxima entrevista.

De todas formas, tanto la primera como la última entrevistas deberían tener un contenido especial, que abarcara, en el primer caso, una información general a los alumnos y las alumnas sobre los aspectos que tendremos en cuenta a la hora de evaluarlos, como por ejemplo: el cumplimiento y el seguimiento de la planificación, la variabilidad en la aplicación de recursos, la actitud respecto a la investigación, la creatividad y autonomía, la originalidad, etc. En cambio en la última entrevista —antes de la escritura de la memoria— deberíamos tratar temas como por ejemplo: repaso de las incidencias observadas, discusión sobre la metodología, algunos comentarios a aspectos específicos del trabajo, autoconciencia del trabajo realizado, contenido de la memoria, características generales de la presentación pública, etc.

4.6. Evaluación y autorreflexión

La evaluación del trabajo de investigación la hemos diseñado pensando tanto en el seguimiento que hemos realizado del trabajo del alumnado como en el resultado final del mismo. A continuación mostramos, muy resumidos, los contenidos de cada uno de dichos apartados.

Por lo que se refiere a la evaluación de las sucesivas fases de realización del trabajo, al final de cada entrevista el profesor o profesora valorará diferentes aspectos de la actuación del alumnado, entre otros: la capacidad de

análisis, los conocimientos y capacidad de integración, la claridad de la comunicación y el progreso que va realizando.

En la evaluación final incluiremos la valoración de aspectos como la actitud frente a la investigación (interés mostrado por lo que se refiere a la formulación de cuestiones a partir del trabajo desarrollado, variabilidad en la aplicación de recursos, grado de autonomía, profundización en los resultados obtenidos, etc.); la creatividad y originalidad de los resultados; la presentación de la memoria (de la que tendremos en cuenta tanto los contenidos de los diferentes apartados —introducción, descripción del trabajo, resultados discusiones, conclusiones—, como el uso adecuado de la lengua, la valoración crítica del propio trabajo, etc.); y la exposición oral del trabajo, en la que un tribunal valorará la corrección y claridad, de la exposición, el uso adecuado del vocabulario, la capacidad de síntesis en la presentación, etc.

La propuesta de una autoevaluación y una autorreflexión, en la que pedimos opinión al alumno o alumna sobre lo que piensa que ha aprendido y sobre la opinión que le ha merecido la actuación del tutor o tutora que le ha orientado, supone el final del trabajo de investigación.

6. Conclusiones

La recopilación de toda la información anterior debería servir al profesor para profundizar en la metodología de los trabajos de investigación, tratando de mejorar no sólo su actuación respecto al alumno o alumna, sino de ampliar sus conocimientos respecto a los contenidos de las investigaciones, lo que le facilitará la generación de nuevas líneas de investigación.

Lo que hemos expuesto en esta comunicación es el estado actual del trabajo y reflexiones realizadas hasta ahora, los cuales valoramos positivamente ya que cumplen con los propósitos iniciales.

BIBLIOGRAFÍA

- ABRANTES, P. (1994) *O trabalho de Projecto e a relação dos alunos com a matemática*. Lisboa. APM Col. Teses.
- ALSINA, C., FORTUNY, J.M., GIMÉNEZ, J. (1994) *Bon dia Mates, Crèdits 1 al 8*. Barcelona. Departament d'Ensenyament.
- AUSTIN, J. (ed) (1991) *Applications of Secondary School Mathematics*. Reston VA. NCTM
- COMAP (1997) *Principles and practices of mathematics*. New York, Springer.
- DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT, (1992) *Treball de recerca*. Barcelona. Generalitat de Catalunya.
- O'SHEA, T. (1979). "Geometric Transformations and Musical Composition". *Mathematics Teacher*. (Octubre, 1979).
- PÉREZ, A.(1998). "Internet y Matemáticas", SUMA 29, pp. 97-105, FESPM.
- VILATZARA, Grup (1999) "Recerca i Matemàtiques al Batxillerat: alguns suggeriments". Material de treball no publicat.
- GARFUNKEL, S. (1991) *For all practical purposes*. New York. COMAP.
- SOL, M. (1998) "Proyectos matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos". UNO