

UNA CLASIFICACIÓN INCLUSIVA DE PRISMAS CUADRANGULARES. DIFICULTADES

Guillén Soler, Gregoria

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Introducción

La clasificación de los cuadriláteros se ha considerado como objeto de estudio por varios investigadores (véase como ejemplo, Castelnuovo, 1979; Fielker, 1981-93). Las ideas desarrolladas por ellos son perfectamente trasladables a la clasificación en el mundo de los poliedros, clasificación que ofrece nuevas posibilidades; algunas las vamos a mostrar aquí al centrarnos en una clasificación de los prismas cuadrangulares¹.

En esta comunicación vamos a presentar cómo desarrollamos la clasificación de cuadriláteros y de prismas cuadrangulares en las experimentaciones realizadas con estudiantes de Magisterio: Tratamos una clasificación inclusiva de los cuadriláteros y la construcción del diagrama que representaba esa clasificación; después acometemos la tarea de representar mediante un diagrama las relaciones de inclusión, exclusión o solapamiento que existe entre las familias de prismas cuadrangulares establecidas al clasificar y la tarea de justificar estas relaciones.

Una clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Construcción del diagrama que la representa. Una vez desarrollada una tarea de descripción de los diferentes cuadriláteros², en la que se enumeraron las propiedades de ellos relativas a los lados, los ángulos, las diagonales y a sus simetrías, mostramos los diagramas con forma de red de la figura 1.

Utilizamos varillas y chinchetas (que se utilizan como mecanismos de unión) para mostrar, a partir de la construcción, que el cuadrado es un rombo particular pues surge como un caso particular de la construcción de los diferentes rombos. Utilizamos también el cuadrado y el rombo, que en el diagrama 1a están conectados con una flecha, para mostrar cómo se puede interpretar la información que refleja una flecha en un diagrama y cómo se formulan las relaciones entre las familias implicadas. Luego propusimos que se explicaran las relaciones de inclusión que refleja el diagrama de la figura 1a entre otros pares de cuadriláteros.

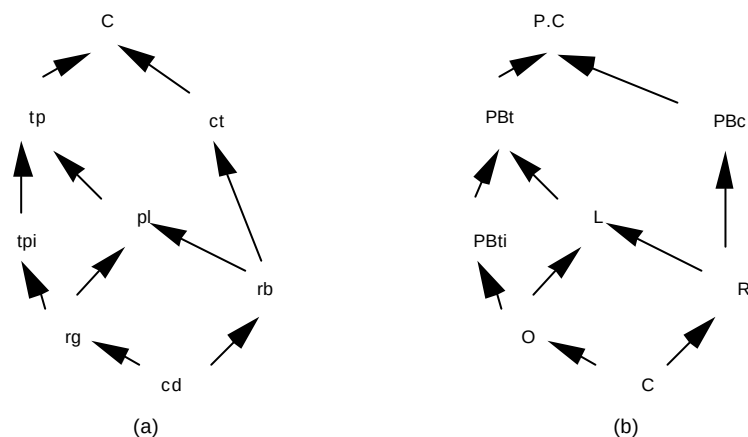


Figura 1

La actividad planteada presentó bastantes dificultades para los estudiantes. Fue necesario que el profesor utilizando varillas y chinchetas planteara las preguntas adecuadas y dirigiera la actividad para que los estudiantes enunciaran relaciones entre los cuadriláteros, como, por ejemplo, que “el cuadrado es un rombo y un rectángulo” o que “el rombo es una cometa y un paralelogramo”.

Como ejemplo vamos a indicar cómo establecimos que el rombo es una cometa:

¹ En Guillén (1997) puede encontrarse con más detalle lo que vamos a presentar en esta comunicación.

² Los cuadriláteros a los que nos referimos son los implicados en el diagrama de la figura 1a. Las abreviaturas que utilizamos para ellos son las siguientes: El cuadrado, cd; el rectángulo, rg; el rombo, rb; el paralelogramo, pl; el trapecio isósceles, tpi; la cometa, ct; y el trapecio, tp.

– Después de elegir dos varillas diferentes de una caja se apuntó que también podrían haber salido iguales. Se subrayó que las condiciones para construir cometas son “que las varillas se junten perpendicularmente a la misma distancia de los dos extremos de una de las varillas, por lo menos”; y se indicó que las posibilidades que se muestran en la figura 2 son todas ellas posibles.

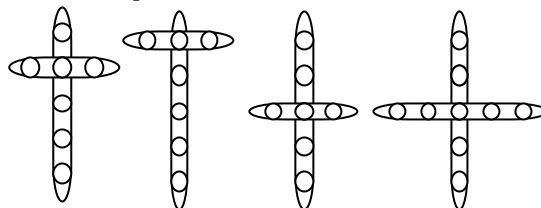


Figura 2

– Para cada posibilidad mencionada, se cuestionó el cuadrilátero que se obtenía al juntar con varillas los extremos de las que ya se habían unido. Se llamó la atención sobre que siempre se obtienen cometas y en algunos casos se obtienen cometas especiales que son rombos no cuadrados, o rombos - cuadrados, pero hay muchas cometas que no son rombos.

– Se trabajó también el paso de estas observaciones a las expresiones verbales: “todos los rombos (cuadrados) son cometas” pero no se puede decir que “todas las cometas son rombos”.

La tarea de clasificar los cuadriláteros se continuó resaltando que si dos familias tienen relación de inclusión, en el diagrama éstas están conectadas con una flecha que va desde la familia contenida (ahí está el origen) hasta la familia que la contiene (ahí está el extremo). Aclaramos también con varios ejemplos que los pares de familias que en el diagrama están conectadas por un camino que sigue este esquema $\rightarrow$, o $\rightarrow\rightarrow$, o $\rightarrow\rightarrow\rightarrow$,... tienen también relación de inclusión: el origen del camino corresponde a la familia contenida en todas las demás del camino y el extremo está en la familia que contiene a todas las implicadas en el camino.

Lo que cuestionamos fue si en el diagrama de la figura 1a había que introducir más flechas porque hay relación de inclusión entre familias que no están conectadas con ellas. Esta cuestión además de mostrarnos algunos errores que comenten los estudiantes, nos introdujo en otro problema: cómo justificar que algunos pares de cuadriláteros no tienen relación de inclusión en ningún sentido y tampoco son familias excluyentes.

La clasificación los prismas cuadrangulares. La analogía. Una vez clasificados los cuadriláteros consideramos como universo de clasificación los prismas cuadrangulares y dentro de ellos las familias que se representan en el diagrama 1b: cubo, C; ortoedro, O; romboedro, R; paralelepípedo, L; prisma de bases cometas, PBC; prisma de bases trapecios isósceles, PBti; prisma de bases trapecios, PBt. Recordamos los convenios utilizados en la construcción de los diagramas con forma de red para reflejar las relaciones entre cuadriláteros. Luego pedimos que se estableciesen analogías entre los diferentes cuadriláteros y los prismas que acabábamos de nombrar y que se averiguase si entre el ortoedro y el cubo, el ortoedro y el romboedro, el paralelepípedo y el prisma de base cometa, hay relación de inclusión, exclusión, o tienen elementos comunes pero no están incluidos en ningún sentido.

La construcción del diagrama que refleja la clasificación de los prismas cuadrangulares permitió mostrar cómo se puede aplicar la analogía para explicar las relaciones de inclusión o no inclusión que hay entre pares de familias de prismas cuadrangulares: se pasa el problema al plano después de establecer los elementos análogos y se explica ahí la respuesta (se construye el diagrama que refleje la clasificación de los cuadriláteros); después se hacen las traducciones correspondientes de los elementos análogos.

Esta tarea permitió destacar lo que indica Polya (1957, p. 58) sobre por qué un rectángulo es análogo a un ortoedro (paralelepípedo recto rectangular):

De hecho, las relaciones entre los lados del rectángulo son semejantes a las que existen entre las caras del ortoedro. Cada lado del rectángulo es paralelo a uno solo de los otros lados y perpendicular a los lados restantes. Cada cara del ortoedro es paralelo a una sola de las otras caras y perpendicular a las caras restantes. Si se considera como “elemento límite” el lado del rectángulo y la cara del paralelepípedo respectivamente, se pueden reducir las dos consideraciones anteriores a una sola que se aplique a ambas figuras: cada elemento límite es paralelo a uno solo y perpendicular a los restantes elementos límites.

También permitió descubrir que en los prismas de bases cometas, prismas de bases trapecios isósceles o de bases trapecios se rompen las relaciones de igualdad y perpendicularidad entre los elementos límites (lado y cara lateral respectivamente). En los prismas oblicuos una igualdad de lados del polígono de las bases no implica que las caras laterales correspondientes sean iguales, ya que los ángulos de estas caras pueden cambiar. Una vez que se ponga de manifiesto que esto ocurre, se puede apuntar que aunque se rompen algunas relaciones entre los elementos análogos que aparecen en los diagramas correspondientes de elementos del plano y del espacio, dado que estas relaciones sí que se mantienen en algunas familias (por ejemplo la de igualdad se mantiene en los romboedros y en paralelepípedos) y para todas las familias de prismas cuadrangulares se siguen verificando las relaciones de paralelismo entre los elementos límites, consideramos que los elementos del plano y espacio comparten relaciones que son pertinentes para el problema propuesto.

Vale la pena advertir que cuando se desarrolle en clase esta tarea, para que el aprendizaje del diagrama que representa estas clasificaciones no se reduzca a un aprendizaje de memoria, es aconsejable pedir que se indiquen y descifren de nuevo los convenios que se utilizan para construir diagramas de red y que se formulen las relaciones de familias de sólidos que quedan reflejadas en el diagrama. También hay que llamar la atención sobre la terminología geométrica que algunos estudiantes utilizan en los diagramas que construyen. En algunos casos los diagramas no pueden considerarse ni representaciones de clasificaciones del plano ni del espacio porque en ellos hay nombres de sólidos y de polígonos. Hay que prestar atención a este problema.

Las relaciones entre familias de prismas cuadrangulares. La clasificación de los prismas cuadrangulares permite subrayar que se puede justificar en el espacio, al igual que se hizo en el plano, las relaciones que existen entre pares de familias de prismas cuadrangulares. Veamos como explicamos las relaciones que hay entre el cubo y el ortoedro:

Para construir ortoedros se tienen que elegir 6 rectángulos que pueden ser todos ellos rectángulos no cuadrados, o rectángulos no cuadrados y rectángulos-cuadrado o sólo rectángulos-cuadrado. Como una de las posibilidades lleva al cubo, podemos concluir que el cubo es un ejemplo ortoedro, por lo que “todos los cubos son ortoedros”. Por otro lado, la observación de que también hay ortoedros que no son cubos, y se seleccionaron ejemplos de ellos, llevó a explicar que “hay ortoedros que no son cubos”.

Justificar las relaciones entre prismas cuadrangulares también conlleva grandes dificultades para los estudiantes aunque se razone en términos de construcción de diferentes tipos de ejemplos, como lo hemos hecho antes. Fue necesario que explicásemos de esta manera que los paralelepípedos y los prismas de base cometa tienen ejemplos comunes pero no tienen relación de inclusión: Una vez precisado que los ejemplos de paralelepípedos pueden estar formados por todos los tipos de paralelogramos (paralelogramos genéricos, paralelogramos-rombo no cuadrado, paralelogramos-rectángulo no cuadrado, paralelogramos-cuadrado), delimitamos diferentes ejemplos al construirlos con 6 paralelogramos que fueran todos del mismo tipo o mezclados. De la misma manera, precisamos que los ejemplos de prismas de bases cometas tienen por bases cualquiera de los tipos de cometas (cometas genéricas, cometas-rombo no cuadrado, cometas-cuadrado) y que las caras laterales pueden ser cualquiera de los paralelogramos. Delimitamos así ejemplos de prismas de bases cometas, según el tipo de cometa que tenga en la base y variando también los paralelogramos de las caras laterales y se verificó que el cubo y el romboedro genérico están en las dos familias. Para algunos estudiantes también tuvimos que conducir la actividad para justificar relaciones que se podían establecer entre otros pares de familias.

De lo mencionado hasta ahora queremos destacar la conveniencia de trabajar en primer lugar las inclusiones de familias en términos de ejemplos y aplicar luego que si una familia está incluida en otra, verificará sus propiedades. Consideramos que es posterior que los estudiantes lleguen a aplicar de manera inmediata que entre los grupos de propiedades de las familias hay una relación de inclusión que es la contraria a la que existe entre ellas en términos de ejemplos.

BIBLIOGRAFÍA

- Castelnuovo, E. (1979): *La Matematica. La geometria*. [Trad. catalana: *La matematica. La geometria*. (Ketres: Barcelona), 1981].
- Fielker, D. S. (1981-1983): Removing the Shackles of Euclid, *Mathematics Teaching* . Nos. 95-104. [Trad. castellana: *Rompiendo las cadenas de Euclides*. (Ministerio de Educación y Ciencia: Madrid), 1987].
- Guillén, G. (1997): *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis doctoral). (Universitat de València: Valencia).
- Polya, G. (1957): *How to solve it*. 2nd edition. (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Trad. castellana: *Cómo plantear y resolver problemas*. (Trillas: México), 1965].