

LA ODISEA COMBINATORIA

Casado Barrio, M^a Jesús

Los **problemas de recuento** al nivel de Secundaria, se abordan, generalmente, centrándose en las cuestiones del orden y la repetición, sin embargo hay otros contenidos implícitos en sus enunciados que permiten aprovechar su estudio para desarrollar importantes técnicas de resolución de problemas.

Un replanteamiento de este tema supondría, en primer lugar, una programación en espiral, que introdujese escalonadamente los procedimientos necesarios en cursos anteriores a 4º de E.S.O. o 1º de Bachillerato, conectándolos y aplicándolos en otros contenidos que ya están en el currículo de 1º o 2º como son las fracciones.

Nuestro reto es desglosarlos en pequeñas etapas que se puedan afrontar a distintas edades o niveles, lo que también nos proporcionaría una base para hacer diversificaciones curriculares dentro del aula.

Estas son algunas de las reflexiones que hacemos antes de “embarcar” hacia nuestro destino:

1. *¿Cuáles son los conocimientos previos que los alumnos tienen del tema?*
2. *¿En qué situaciones de la vida real aparece?*
3. *¿Qué materiales podemos utilizar para su introducción?*
4. *¿Qué relación guarda con otros temas del currículo, tanto anteriores como posteriores?*
5. *¿Qué es lo realmente básico y necesario que todos deberían aprender?*

A la hora de resolver un problema:

6. *¿Entendemos el enunciado?, independientemente del nº de soluciones que haya, ¿somos capaces de elaborar alguna de ellas?*
7. *¿Cuál es el mejor método para representar las soluciones?, ¿es el diagrama de árbol (D.A.)?*
8. *¿Cómo se construyen estos gráficos?*
9. *¿Qué conjuntos intervienen en el problema?*
10. *Si hay varios, ¿trabajamos con todos?, ¿cuál de ellos es el que vamos a seleccionar?*
11. *¿Cuáles son los elementos que se consideran distintos o iguales? ¿cómo influye el nº de éstos? ¿trabajamos con todos, sólo con los seleccionados, sólo con uno de cada clase?*
12. *¿Qué significa la repetición en este problema?, ¿es un mismo elemento o son varios?*
13. *¿Qué significa el orden en este problema?*
14. *¿Cómo se interpretan en éste las soluciones?*
15. *¿Habría otra/s forma/s de interpretarlo?*
16. *¿Cómo son los problemas que tienen fórmula y cómo los que no la tienen?*

Las 5 primeras preguntas son valoraciones que hacemos los profesores antes de comenzar cualquier tema, el resto forman parte de un proceso de reflexión que nuestros alumnos deberían ser capaces de hacer en los últimos tramos de “la espiral”. Intentar llegar directamente a la nº 16 significaría perder todo el bagaje de recursos que la combinatoria y en definitiva, las matemáticas aportan a los distintos esquemas de elaboración del pensamiento.

• ¿CUÁL DEBE SER NUESTRO PUNTO DE PARTIDA?

Desde que, al comienzo del día seleccionamos la ropa que nos pondremos, hasta cuando tomamos el autobús, estamos “*haciendo combinatoria*” (cuando preparamos la mesa para comer sabemos que tenemos 3 tipos de cubiertos y escogemos uno de cada clase, ambas son **pautas de ordenación**, “**formar clases**” y “**elegir un elemento de cada una**”).

Pero nuestra tendencia general es a **agrupar objetos iguales (1ª pauta)**, no a separarlos. Así los libros de la estantería los ponemos por tamaños, por cursos, o por materias, siempre por características comunes, sólo en raras ocasiones hacemos “**mezclas**” (2ª pauta); más raro todavía es que hagamos más de una mezcla, pero lo que es casi inverosímil es que probemos a hacer todas las mezclas distintas que pueden aparecer, haremos las que necesitemos y nada más.

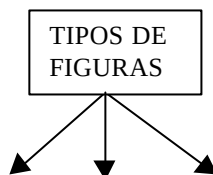
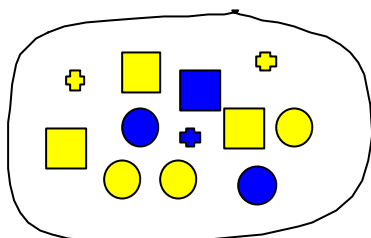
Con estos antecedentes **¿cuál es la lógica de una gran parte de los problemas de combinatoria?**. En cierto modo prever lo que puede pasar cuando se unen varios eventos. Aunque yo no pruebe todos los casos es seguro que entre un gran número de personas si ocurrirán, por eso puede haber alguien que acierte la quiniela o la primitiva, aquí es donde enlaza con la probabilidad. También puede ayudarnos a tomar una decisión ya que, conocer todo lo que puede ocurrir, me servirá para estar preparada cuando uno de los sucesos acontezca.

🔪 Buscando este nexo con la forma de proceder natural (1ª pauta) y la sencillez podemos empezar con **ejercicios de agrupaciones. (Nivel 1).**

Se parte de un conjunto con varios elementos que tienen algunas cualidades comunes y se hacen subconjuntos siguiendo esas características. Después se representan en un D.A. las distintas clasificaciones siguiendo un orden inclusivo y se hace un recuento de los tipos de elementos encontrados. La dificultad está

en la cantidad de clases que aparezcan, en que se digan o no de antemano los criterios a seguir (forma, tamaño), y en que aparezcan o no las mismas cualidades dentro de cada grupo, con lo cual sale un diagrama con el mismo n° de ramas en cada punto o con distinto n°. En un primer momento podemos trabajar con objetos tangibles como regletas o figuras y más adelante sobre el papel.

Ej. 1. En el siguiente conjunto agrupa los elementos por su forma. ¿Cuántos subconjuntos has obtenido?. Escríbelos en este “árbol”



Dentro de cada subconjunto agrupa de nuevo por colores. ¿Cuántos colores distintos hay?. Anótalos en un nuevo diagrama.

¿Cuántos tipos de figuras hay?, ¿coincide con el n° total de figuras? ¿por qué?

- En este primer contacto con el D.A. debemos observar que su finalidad no es representar elementos, sino cualidades de éstos. Si llamamos $A = \text{"Forma"} = \{\text{cuadrados, círculos, cruces}\}$ y $B = \text{"Color"} = \{\text{amarillo, azul}\}$, lo que representamos es el **producto cartesiano** $A \times B$.

- Igualmente $B \times A$ daría respuesta a los tipos de figuras.

Este modo de dividir los elementos de un conjunto coincide con el concepto de **fracción como operador**, o **como relación entre dos cantidades**, así podemos decir que cuatro doceavos de los objetos anteriores son azules. El D.A. con unas pequeñas modificaciones aporta una herramienta nueva y útil para trabajar en este contexto.

🔪🔪 El 2° paso (**Nivel 2**) sería **plantear el problema a la inversa**. Nos dan los criterios de distinción de elementos y formamos con ellos el conjunto total aunque, claro está, eso no nos da su cardinal.

Ej. 2. En una fábrica de vestidos trabajan con telas de varios colores, rojo, verde y azul, y en tres formatos, lunares, rayas y cuadros. ¿Cuántos tipos de vestidos pueden fabricar?

Solución:

$$A = \{\text{rojo, verde, azul}\} \quad B = \{\text{Lunares, rayas, cuadros}\}$$

$$A \times B = \{(\text{rojo, lunares})(\text{rojo, rayas}) \dots (\text{azul, cuadros})\}, \quad 3 \times 3 = 9 \text{ tipos de vestidos}$$

En este nivel se trabaja directamente con los productos cartesianos, bien de conjuntos distintos o de un conjunto por sí mismo (más difícil de entender). El resultado final es bien sencillo, el producto de ambos cardinales, y esto es suficiente para muchos problemas elementales de probabilidad, como lanzamiento de monedas o de dados.

Ej. 3. El resultado de un partido de fútbol puede ser, según la quiniela, de 3 tipos, 1,x,2. Si se juegan dos partidos, ¿Qué parejas de resultados pueden darse? ¿A qué producto cartesiano corresponde?

Analiza lo que ocurriría si fuesen 3 o más partidos.

Hay que destacar que **todos los conjuntos que forman el producto aparecen siempre reflejados en el diagrama de árbol**, coincidiendo el n° de filas con el de factores, así mismo debemos distinguir en qué casos nos daría lo mismo hacer $A \times B$ o $B \times A$, o cuándo estamos obligados a hacer uno de ellos o ambos.

En estas fases iniciales se trabajan fundamentalmente las formas de clasificación y de representación. La traducción simbólica de inclusiones o de sucesos que ocurren uno tras otro. Todo esto nos llevará a ver que el Diagrama de árbol no es más que una clasificación de los distintos tipos de soluciones. Si se han asimilado ambos procesos se han comprendido también una buena parte de los ejercicios de probabilidad en Secundaria.

🔪🔪🔪 En la época conjuntista se explicaba la combinatoria por medio de **aplicaciones**. Pasada “la fiebre” se rechazaron la mayor parte de estas ideas, sin embargo algunas de ellas no debieron quedar en el olvido....

Nivel 3:

Ej.4. ¿De cuántas formas podemos repartir un chicle un caramelo y una chokolatina entre 6 niños, dando una sola chuchería a cada uno?

Este enunciado, según parece, nada tiene que ver con los anteriores. No se trata de buscar similitudes o de hacer mezclas para formar vestidos, se trata de escoger chucherías ... ¿o tal vez niños?. Es un **problema de asignación**.

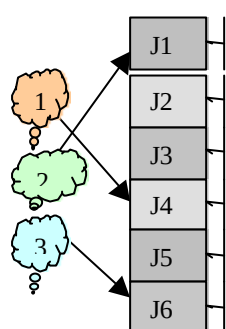
Un grupo importante de enunciados es el que tiene que ver con las aplicaciones que se establecen entre dos conjuntos. La primera dificultad es buscar quién es el conjunto de partida, que para cumplir la condición de

aplicación será el que utilice en una solución todos sus elementos de forma única. La segunda es determinar el tipo de aplicación que será biyectiva o inyectiva en los casos más sencillos.

Si la aplicación se establece de modo correcto, el **conjunto inicial** aporta el “orden”, su papel es tan “discreto” que en muchos problemas no aparece como tal; y el **conjunto final** los “elementos a escoger”. Recordemos que en el producto cartesiano todos los conjuntos que intervenían tenían la misma importancia.

Como figura de transición hacia el D.A. utilizamos una tabla de doble entrada para representar cada aplicación. En columnas, el conjunto de partida, en filas el de llegada. Las cruces en las casillas hacen el papel de las flechas (una sola por fila y columna salvo que haya repetición). De aquí se obtiene un vector solución, que se ha puesto en columnas por preferir la utilización vertical del Diagrama. Todos los vectores solución conforman el D.A. que, lógicamente sólo tiene elementos de este 2º conjunto. El 1º subyace en cada fila.

Ej. 5. ¿Cuántas maneras hay de colocar 3 pájaros en 6 jaulas poniendo uno solo en cada una?



		JAULAS					
		1	2	3	4	5	6
PA J	1				X		
	2	X					
	3						X

La asignación de un número a cada objeto permite un primer acercamiento al orden. En las tablas se ve con más claridad que la primera en ocupar fue la jaula nº 4, la 2ª la jaula nº 1 y la 3ª la nº 6, por lo tanto escogemos jaulas y no pájaros.

Abreviadamente:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Según la tabla, la 1ª cruz podría haberse marcado en cualquiera de las 6 columnas, la segunda sólo en las columnas 1 2 3 5 6, puesto que cada jaula lleva un único pájaro, la tercera cruz sólo en la 2 3 5 6, de ahí que el nº de colocaciones sea $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Si hacemos directamente el D.A. el error más común que se presenta es colocar en una fila los pájaros y en otra las jaulas, es decir, trabajar como si fuese un producto cartesiano. Esto no es del todo incorrecto, ya que cada flecha representa un par de este producto. Este es el nivel en el que se quedan algunos de nuestros alumnos (1º y 2º), para construir el tercero deben asimilar que avanzamos un paso más combinando, en este caso, 3 de estas parejas para formar una aplicación.

Finalmente “la combinatoria”. Nivel 4.

Es el momento de poner nombre a algunos de los ejercicios anteriores, los que cumplen que **el proceso de selección se lleva a cabo en un único conjunto que designaremos como A**. Esto supone que en el D.A. aparezca él en todas las filas, y que en la primera de ellas podamos verlo con todos sus elementos ya que en la primera elección somos libres para elegir cualquiera de ellos. Son los problemas de **Variaciones, Combinaciones y Permutaciones**.

Distinguirlos supone tener claro:

- ✓ **Quién es A y cómo son sus elementos.**
- ✓ **El modo y nº en que se llevará a cabo esta selección.**

Para ello se propone un esquema resolutorio basado en el estudio de las distintas soluciones del problema con el que trabajamos:

- 1- Se elabora un **ejemplo de respuesta** a la pregunta del enunciado
- 2- Observándola nos preguntamos si sus elementos **pertenecen a un solo conjunto o a varios**, e indicamos cuáles son éstos. Nos preguntamos también si ambos son necesarios, ya que puede ocurrir que uno de ellos se pueda eliminar. En el caso de un solo conjunto podría tratarse de un problema de V, C, o P, si hay varios podría ser un producto cartesiano (lo cual resolveríamos directamente), o un problema compuesto (lo dividiríamos en problemas simples).
- 3- Para aclarar el proceso selectivo nos preguntamos si **una vez elegido el primer elemento éste puede volver a participar en la segunda elección** (con lo cual habría repetición) y cuál sería el significado para este problema concreto.
- 4- Nos preguntamos también si **el hecho de intercambiar ambos elementos aporta una solución nueva** (orden) y por qué.
- 5- Finalmente, si así lo precisamos, elaboramos un diagrama, que nos permita obtener la fórmula correspondiente, o ponemos ésta directamente.

Nuestra primera toma de contacto puede ser con las variaciones con repetición, por identificarse con el producto cartesiano de un conjunto por sí mismo. A partir de aquí pueden seguirse varios caminos, por ejemplo podemos continuar con las variaciones sin repetición por la sencillez de su fórmula gráfica. De ahí

podemos ir a las permutaciones, permutaciones con repetición, combinaciones y combinaciones con repetición.

Si trabajamos también con los elementos no seleccionados (esto ya se hace en algunos problemas compuestos), podemos relacionar tanto las combinaciones $C_{n,r}$ como las variaciones $V_{n,r}$ con las **permutaciones con repetición**, sólo tenemos que pensar en la elección de la muestra como la división del conjunto total en 2 subconjuntos, el de “los elegidos”= E , que forman parte de esta, y los “no elegidos”= E' .

- ✓ Para las primeras se trata de formar n -tuplas en las que E aparece r veces, y E' , $n-r$ veces. (Esto vincula el Triángulo de Pascal a los números combinatorios)
- ✓ Para las segundas tendremos n -tuplas con r elementos distintos, los de E , y $n-r$ iguales, los de E' . (Un problema sencillo para resolver de este modo es el de sentar un n° de personas en un n° mayor que éste de asientos).

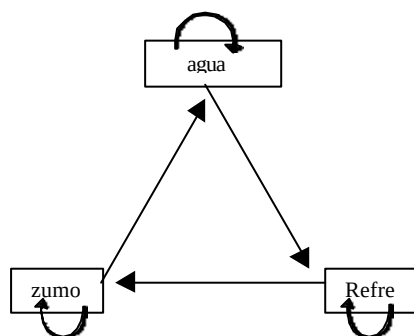
Para las combinaciones con repetición la idea básica es la siguiente, **cada repetición funciona como un elemento nuevo** (el repetido) que es susceptible o no de ser elegido.

Ej. 6. *Un niño sediento tiene ante sus ojos una máquina de bebidas. Ésta tiene zumo, agua y refresco de naranja. Decide comprarse dos bebidas, ¿cómo puede ser esta pareja?*

	Zumo y ag		zumo y ref		Ag y ref		Dos zumos		Dos Ag		Dos ref	
	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'
Zumo	X		X			X	X			X		X
Agua	X			X	X			X	X			X
Ref.		X	X		X		X			X	X	
1ºRep		X		X		X	X		X		X	

$$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$C_{4,2} = CR_{3,2}$$



Por otro lado, si estamos interesados no sólo en el **nº de casos**, sino en su **forma** podemos ayudarnos de un sencillo diagrama. Se trata de dibujar un polígono con tantos vértices como elementos, y también sus diagonales. Tanto éstas como sus lados serán flechas con una sola dirección. Esto garantiza que en un mismo recorrido pasemos una sola vez por cada una (para evitar el mismo recorrido en distinto orden). Siguiendo éstas, y solo en las direcciones que permitan las flechas, recorreremos tantos vértices como elementos tenga la muestra no ordenada. La repetición se indica con una flecha circular en el vértice.

- **Y después de haber recorrido varios puertos, para conformar esta Odisea, un último arribaje ...**

Uno de los libros más completos que hasta ahora se han editado en nuestro país sobre la didáctica de la Combinatoria es el título **“Razonamiento Combinatorio”**. En él se relatan, de manera brillante y pormenorizada todas las conexiones que ésta tiene con distintas partes de La Matemática y de otras Ciencias, cuál ha sido su evolución a través de la historia y las principales Investigaciones, cuáles son los fundamentos didácticos de su enseñanza y sus implicaciones curriculares y un amplio apartado referente a la metodología con los modelos de problemas que podemos encontrar así como sus representaciones, y la forma de abordar éstos en el aula haciendo una detallada exposición por niveles y edades.

Nada mejor, pues, que terminar con unas citas del mencionado libro que nos invitan a la reflexión:

“Los problemas combinatorios constituyen un medio excelente para que los alumnos realicen actividades de matematización (modelización, representación, formulación, abstracción, validación, generalización...) y para proporcionar sentido a otras herramientas conceptuales básicas en la matemática actual”

“El diagrama de árbol es una representación icónica fundamental, porque visualiza la estructura multi-paso del experimento. Por ello, las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor”

Según un trabajo de Fischbein y Gazit (1988) el orden adecuado para enseñar las distintas operaciones combinatorias sería: “Variaciones con repetición, permutaciones, variaciones ordinarias y combinaciones”

“Este autor (referido a Fischbein), ha señalado la importancia de cultivar la intuición matemática desde niño y el hecho de que la intuición combinatoria no se desarrolla espontáneamente”

“El tratamiento casi aislado que ha sido aplicado a la enseñanza del tema –excepción hecha de su relación con la probabilidad y el binomio de Newton- y el tratamiento pedagógico que habitualmente suele aplicarse –

orientado hacia el aprendizaje de fórmulas y su aplicación a ejercicios rutinarios- ha hecho de él un **tema difícil para los alumnos y poco atractivo para los profesores**"

"**Pensar desde el punto de vista combinatorio**, requiere que los estudiantes exploren creativamente los aspectos estructurales de un problema con la esperanza de reducirlo, bien a un caso más simple o a otros problemas previamente resueltos. Como resultado, se analizan sistemáticamente muchas posibilidades de solución y se obtiene conocimiento útil, tanto de los intentos correctos como incorrectos. El proceso general realizado es el razonamiento combinatorio o **"el arte de contar sin contar"** (Townsend, 1987)"

BIBLIOGRAFÍA:

- ABELLANAS L., Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Mc Graw Hill. Madrid
- ARIAS, J. M. Y MAZA, I.: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Casals. Barcelona 1997.
- BATANERO M^a C., DÍAZ GODINO J., Y NAVARRO-PELAYO VIRGINIA. *Razonamiento Combinatorio*. Editorial Síntesis. Col. "Educación Matemática en Secundaria", nº7. Madrid 1994.
- COL. "CUADERNOS DE APOYO PARA EL DESARROLLO DE LOS OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA E.S.O": Nº 33. *Recuento de posibilidades y fenómenos de azar*. Editorial Arcada. Huesca 1997.
- COLERA, M. Y OTROS: *Matemáticas 1º B.U.P.*. Editorial Anaya. Madrid 1987.
- COLERA, M. Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Anaya. Madrid 1996.
- CORIAT M. Y OTROS: *Nudos y nexos. Grafos en la escuela*. Col. Síntesis nº 21. Madrid 1988.
- DÍAZ J. Y OTROS: *Azar y probabilidad*. Col. Síntesis nº 27. Madrid 1987.
- EQUIPO ARRIXACA: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Santillana. Madrid 1996.
- ETAYO J. Y OTROS: *Matemáticas 1ºB.U.P.* Editorial Anaya. Madrid 1977.
- FREUND, J. E. Y SIMON, G. A.: *Estadística elemental*. Editorial P.H.H.. México 1992.
- GONZÁLEZC C. Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Editex. Madrid 1995. 1996.
- GRANOUILAC, ANDRÉ: *Cómo comprender la estadística*. Editorial Ibérico europea de ediciones.Madrid 1978.
- LIPSCHUTZ. S.: *Probabilidad*. Editorial Mc Graw Hill. México 1995.
- MAZA C. Y ARCE C. : *Ordenar y clasificar*. Col. Síntesis nº 31. Madrid 1991.
- REINHARDT, F. Y SOEDER, H.: *Atlas de matemáticas 2*. Editorial Alianza. Madrid 1996.
- SANZ LERMA I. Y OTROS: *Por los caminos de la lógica*. Col. Síntesis nº 22. Madrid 1988.
- SIXTO RIOS: *Análisis estadístico aplicado*. Editorial Paraninfo. Madrid 1983.
- VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 3º de E.S.O.*. Editorial S.M.. Madrid 1995.
- VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 4º de E.S.O.*. Editorial S.M.. Madrid 1994.
- VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 1º B.U.P.*. Editorial S.M.. Madrid 1991.