

RALLYE MATEMÁTICO “SEN FRONTEIRAS”

Plata Casais, Aurora
Rodríguez Taboada, Julio
García Pinal, Aníbal

¿Qué é o Rallye?

O Rallye Matemático “Sen Fronteiras” é unha proba – competición de resolución de problemas que se ven desenvolvendo en Galicia de xeito anual dende o ano 1993 (en abril do presente ano celebrouse a 7ª edición). A idea de levar a cabo esta actividade xurde no V Congreso de ENCIGA (Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia) celebrado en Carballo en 1992. Nese congreso tívose coñecemento dun concurso de resolución de problemas que se disputaba en varias rexións de Francia e que, polas súas características peculiares pareceunos moi interesante e susceptible de exportar ó noso país.

A partires dese intre, comezaron os contactos co IREM de Toulouse, en concreto co profesor André Antibí para coñecer-las detalles da organización do Rallye e amosarlle o noso interese en unirmos á súa experiencia. Dende entón continúa a cooperación con Francia e, froito dela, a proba realízase cada mes de marzo ou abril e nela veñen participando un número de alumnos superior ós 3000 (de media).

Desenvolvemento da proba

Nesta actividade poden participar clases completas de alumnos de 3º e 4º cursos da ESO ou os seus equivalentes no anterior sistema de ensino (1º e 2º de BUP ou FP). Nela deberán resolver, nun período de 2 horas, dez problemas que son unha parte comúns para 3º e 4º e outros específicos para cada curso. Cada clase dará unha resposta, de xeito conxunto, a cada problema, xunto coa explicación de cómo se chegou a ela. Para cualificar-la proba téñense en conta non soamente as solucións senón tamén os métodos de resolución empregados.

A proba lévase a cabo no mesmo día en varias rexións de Francia e en Galicia e os problemas son os mesmos en tódalas zonas. As condicións que debe cumprir unha clase para poder participar son as seguintes:

- A participación na proba de, a lo menos, o 75% dos alumnos que a compoñen (non se permiten seleccións de colexios ou de varias clases).
- A inscrición con eles dun profesor, non necesariamente de Matemáticas, que se compromete a supervisar-la realización da proba en outro instituto. Isto conleva o desprazamento dalgúns profesores, o que se fai de xeito totalmente desinteresado, polo que temos que agradecerlles publicamente a súa colaboración.
- O profesor da clase participante comprométese a traballar-la resolución de problemas coa súa clase.

O premio para o grupo mellor clasificado consiste nunha viaxe a Toulouse para asistir, no mes de Maio, á celebración da Festa das Ciencias, dentro da que se encadra a final rexional do Rallye na zona de Aquitania – Midi Pyrenées. Tamén hai premios para os grupos clasificados en 2º e 3º lugar, que consisten en diversos regalos (camisetas, libros, diplomas,...) doados por entidades comerciais colaboradoras.

Os problemas propostos no Rallye son, ou tentamos que o sexan, diferentes ós que se resolven habitualmente na clase de Matemáticas e non requiren de gran ferramenta matemática; pero si de habilidade no uso de estratexias diversas de resolución de problemas. De feito nestes anos nótase que os institutos que son participantes asiduos, e por tanto supoñemos que ós seus profesores interésalles traballar cos seus alumnos este campo, conseguiron estabilizarse nun nivel alto en comparación coa media das cualificacións obtidas por tódolos grupos participantes.

Dicir tamén que na proba os alumnos poden dispoñer de calquera tipo de material didáctico, a excepción de calculadoras programables e ordenadores, por exemplo usan libros, apuntes, calculadoras científicas, material de debuxo, respostas ós problemas de anteriores edicións, etc...

Análise dos resultados

Neste traballo, ademais de presenta-la actividade, tamén queremos amosar unha análise das respostas dadas polos alumnos ós problemas das edicións pasadas. Por problemas obvios de espacio, a análise da totalidade dos problemas podédelo atopar no CD –Rom das JAEM e nestas actas soamente incluiremos algún exemplo. En todos estes anos o grupo da organización, todos nós profesores de Matemáticas, vímonos asombrando polas solucións e interpretacións dadas polos alumnos a certas situacións e obstáculos que atopaban, o que nos moveu cara a necesidade dunha análise máis detallada destas solucións, facendo fincapé nos métodos de razoamento usado, as distintas solucións a un mesmo problema, os erros inesperados que se repiten ano tras ano, etc...

A partires de entóns adicámonos a un traballo de selección e análise de respostas, que deu lugar a este documento. Nel amosamos respostas dadas polos alumnos que por algún motivo parecerónnos destacables: non necesariamente por ser as mellores, senón por ser representativas da maioría, por amosaren algún erro habitual, por faceren unha interpretación novedosa do enunciado, polo método seguido na resolución, pola súa relación con algúns contidos do currículo,...

Logo da investigación feita (nalgún caso tivemos entrevistas con profesores participantes para coñecer máis detalles do desenvolto da proba), podemos destacar algunhas conclusións, das que facemos un extracto (o traballo completo está no CD):

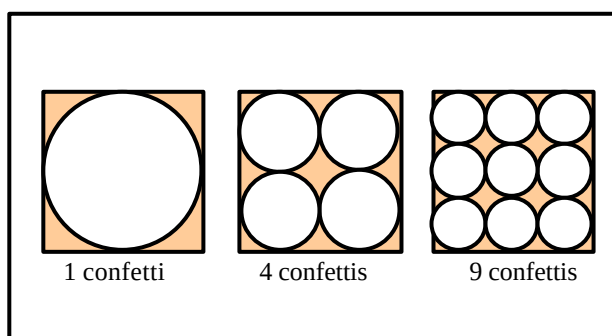
- A resposta dos alumnos ante a actividade é, en xeral, moi boa e, en algún caso axuda a modificar nun sentido favorable a imaxe que tiñan da resolución de problemas en particular e das Matemáticas en xeral.
- A reacción dos alumnos ante situacións que non se asemellan ás que se lles propoñen na clase adoita ser máis acertada do esperado, atopándonos nalgúns casos con razoamentos orixinais e simplificacións dos problemas moi axeitadas.
- É destacable o uso de técnicas de resolución de problemas que non soen ter un lugar destacado no programa da asignatura: tanteo, comprobacións por inducción, redución a casos particulares para logo xeralizar (aínda que ás veces quédanse coas solucións particulares sen buscar a xeral), uso do debuxo para atopar relacións (simetrías, figuras semellantes,...).
- A necesidade que amosan algúns alumnos de relacionaren os problemas con contidos estudados no presente curso, que os leva a inventar hipóteses e relacións que non se nomean no enunciado do problema.
- A dificultade dos alumnos ante algunhas situacións: problemas con varias solucións correctas, necesidade de traballar con expresións literais (adoitan substituí-las variables por números), traballo con números irracionais dos que usan case sempre expresións decimais (aínda que as aproximacións deixan moito que desexar).
- O bo rendemento que sacan os alumnos ó uso de instrumentos de debuxo para axudarse na resolución de problemas xeométricos.

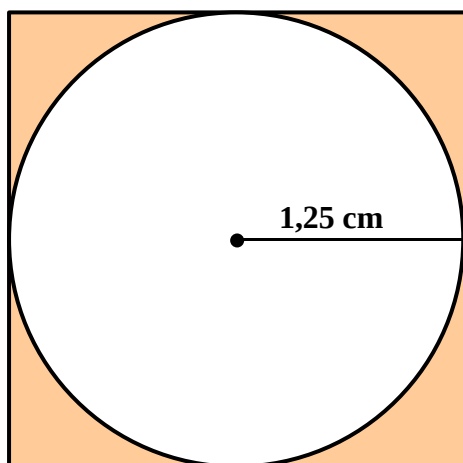
Como mostra destas conclusións, amosamos agora as solucións dadas polos alumnos a algún problema, seguida dun breve comentario sobre as mesmas.

2. O CARNAVAL

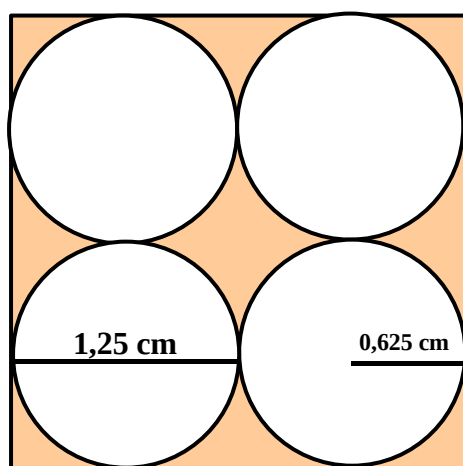
Un fabricante de confetis quere sabe-la masa de papel que pode recuperar por cada corte de fabricación de confetis (ve-la figura). Os tres cadrados teñen de lado a .

Axudarille, dando en función de a , para cada un dos tres casos, a área do papel sobranete.

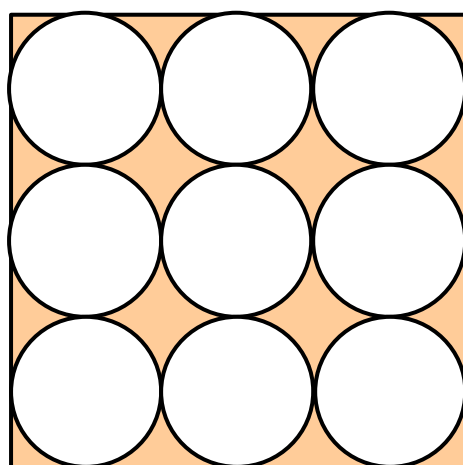


Solución**I.B. MARTAGUISELA 1ª**

$$\begin{aligned} \text{Área do cadrado} &= L^2 \\ 2,5 \text{ cm} \quad A &= 2,5^2 = 6,25 \text{ cm}^2 \\ \text{Radio} &= 1,25 \text{ cm} \\ \text{Área do círculo} &= p \cdot R^2 \\ A &= 3,1415927 \cdot (1,25)^2 = 4,9087385 \text{ cm}^2 \\ \text{O que sobra} &= 6,25 - 4,9087385 = 1,3412615 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Radio} &= 0,625 \text{ cm} \\ \text{Área do círculo} &= p \cdot R^2 \\ A &= 3,1415927 \cdot (0,625)^2 \\ 2,5 \text{ cm} \quad A &= 1,2271846 \text{ cm}^2, \text{ de un círculo} \\ \text{Área total} &= 1,2271846 \cdot 4 = 4,9087385 \text{ cm}^2 \\ \text{O que sobra} &= 6,25 - 4,9087385 = 1,3412615 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} A &= 3,1415927 \cdot (0,4166666)^2 \\ A &= 0,5453977 \rightarrow \text{Un círculo} \\ \text{Área total} &= 0,5453977 \cdot 9 = 4,9085793 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

A área do círculo máis grande é 4 veces maior que un círculo do segundo debuxo, e 9 veces maior que un círculo do terceiro debuxo. Como o cadrado é igual

en todos, sempre vai sobrar a mesma cantidade de papel.

Comentario:

Como se pode comprobar, a solución está incompleta, posto que non se deixa o resultado en función de **a** (lado do cadrado), senón que utilizan un valor concreto para evitar o traballo con variables, en concreto úsase o valor de 2,5 cm porque era a medida do debuxo que se lles proporcionaba na proba. Sen embargo o razoamento do final é correcto, aínda que o resultado que eles obteñen no terceiro caso difire dos outros na cifra das dezmilésimas, erro que eles deberon achacar ás aproximacións decimais.

A solución do problema é unha consecuencia directa da relación existente entre as áreas de figuras semellantes (igual ó cadrado da razón de semellanza), có que se deduce rapidamente o resultado; máis ningún dos grupos participantes contestou usando esta propiedade, a pesares de ter utilizado correctamente o teorema de Thales en outros problemas da mesma proba. Pensamos que esta contradicción, a lo menos aparente, obedece a dúas causas:

- Habitualmente a relación de semellanza é tratada na maioría dos textos, case soamente dende o punto de vista das medidas lineais, sen profundizaren nas relacións obtidas ó estenderen o problema ó cálculo de áreas e volumes.
- Igualmente, este tratamento soe ser centrado no estudio dos triángulos semellantes e, nalgúns casos, de polígonos semellantes. Por isto os alumnos non relaciónan o traballo con círculos co tema de figuras semellantes.

A pesares de non ser unha solución totalmente correcta, escollémola porque ningún dos participantes obtivo un resultado final en función de **a**, a excepción dun exemplo que logo amosamos. Case todos basean a súa resposta en medidas concretas para o lado do cadrado, aínda que algunha vez esta medida non é arbitraria, como vemos na solución do grupo 1º F do instituto “Francisco Aguiar” de Betanzos:

*“Primeiro démoslle a **a** un valor que nos facilitara o traballo, e tomamos 12 cm...”*

Esta apreciación é moi interesante, posto que o uso dun número que sexa múltiplo de 2, 3 e 4 supón a posibilidade de ter medidas enteiras para os diámetros e evitar posteriores erros na aproximación decimal. Ademais, logo de obter o mesmo resultado para o papel desperdiciado, rematan dicindo o seguinte:

*“Dándolle as medidas a **a** que veñen no debuxo, chegamos á conclusión, logo de repetir os mesmos pasos, que recupera o mesmo”.*

Con isto temos outro exemplo de situación na que se substitúe o traballo con expresións literais polo uso de varios caso particulares nos que se comproba (non se demostra) a hipótese feita con anterioridade.

Dentro das solucións deste problema, atopamos varias delas erróneas con erros debidos unicamente a aproximacións decimais mal feitas. Nunha delas, tomando para **a** un valor de 4 cm, os alumnos obteñen, nos dous primeiros casos, que se desperdician 3,44 cm² de papel. Posteriormente, no terceiro caso, teñen uns círculos cun radio de 4/6 cm, o que eles aproximan por 0,6 e obteñen unha cantidade de 5,83 cm² de papel desperdiciado, o que supón **un erro dun 69,48%** respecto da solución anterior.

A aproximación decimal errónea dun número racional ou irracional supón un dos erros máis repetidos nesta actividade e moitas veces da lugar a diferencias inesperadamente grandes coa solución correcta. De feito, ás veces, o uso en clase unicamente das expresións fraccionaria ou radical destes números pode causar a incapacidade do alumno para o cálculo correcto coa expresión decimal que é a usada polas calculadoras e ordenadores, é dicir, polas ferramentas de cálculo máis potentes con que conta, quedando a expensas soamente da súa habilidade para a racionalización e simplificación, operacións estas non moi dominadas pola maior parte dos alumnos.

Outra resposta que chama a atención é a que amosamos de seguido. É ademais un exemplo claro de cómo unha ecuación moi sinxela é complicada de forma case barroca, non por falta de coñecementos, senón por querer “adornar” o proceso cun montón de pasos reiterativos e innecesarios.

$$\text{Área do círculo do primeiro cadrado: } \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{a^2}{4} \cdot \pi$$

$$\text{Área do papel desperdiciado} = x$$

$$a^2 - x = \frac{a^2}{4} \cdot \pi \Rightarrow 1 - \frac{x}{a^2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow -1 \cdot \left(1 - \frac{x}{a^2}\right) = -1 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{x}{a^2} = \frac{4}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x}{a^2} = \frac{4 - \pi}{4} \Rightarrow x = \frac{4 - \pi}{4} \cdot a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{x}{\frac{4 - \pi}{4}}$$

$$a^2 = x \cdot \frac{4}{4 - \pi} \Rightarrow a^2 = x \cdot \frac{4}{\pi} \Rightarrow a^2 = \frac{4x}{\pi} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{4x}{\pi}} \Rightarrow a = \sqrt{1,273239545 \cdot x}$$

$$a = 1,128379167 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{1,128379167} \Rightarrow x = \frac{a^2}{1,273239545}$$

Como se pode ver, a solución si está dada en función de **a**, aínda que, como era de prever entre tanto enrevesamento, ten un erro que deixamos para que sexa detectado polo lector. Logo de facer este desenrolo, os alumnos deste grupo seguen a proceder do mesmo xeito nos outros dous casos nos que, tras repetiren o mesmo erro, chegan ó mesmo resultado.