

EL MARAVILLOSO MUNDO DE LAS CURVAS NOTAS HISTÓRICAS, PROPIEDADES Y USOS DE ALGUNAS CURVAS NOTABLES

Luis Puig Mosquera
Jorge Mejuto Couce
Concepción Ulloa Fernández de Sanmamed
Santiago Gallego Saavedra
Jesús Castro López
(SEMINARIO “Ramón Aller”. Ferrol)

En el ámbito de la Educación Secundaria Post-obligatoria, a excepción de algún caso aislado como el de las cónicas, resulta escasa la atención prestada al mundo de las curvas en cuanto a su génesis, sus aplicaciones prácticas o a las propiedades concretas de las mismas.

Las curvas particulares encierran multitud de aspectos interesantes como son su propia aparición histórica para tratar de resolver algún problema concreto, su semejanza con conocidas formas de la naturaleza, su presencia en la actividad artística, su vinculación al mundo de la física, o la explotación de sus propiedades por la tecnología o la economía, entre otros.

El estudio específico de algunas curvas, desprovisto de tecnicismos excesivos, pretende poner de relieve no sólo los aspectos mencionados, sino facilitar una visión más completa de las Matemáticas y evidenciar su relación con el mundo exterior.

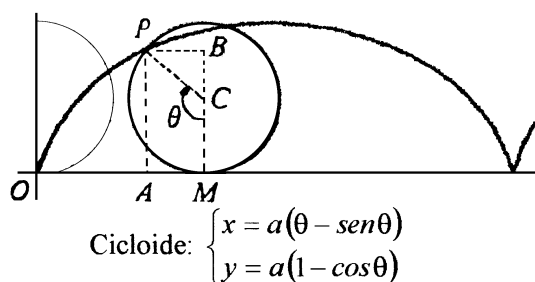
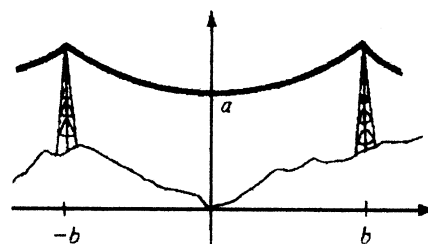
CURVAS, EQUILIBRIO Y RAPIDEZ.

Galileo se había equivocado. Después de haber probado que la trayectoria de un proyectil era siempre una parábola, creyó que esta curva era la forma que adoptaba un cable flexible e inextensible, suspendido libremente de dos puntos situados en distinta vertical. A finales del siglo XVII, matemáticos como Huygens, Jean Bernoulli o Leibniz, encontraron por diferentes métodos la curva en cuestión: la **catenaria**.

La catenaria tiene otra interesante propiedad descubierta por Euler. Éste probó que es la curva plana que pasando por dos puntos dados, al girar alrededor del eje OX, genera la superficie de área mínima (catenoide).

Ninguna curva como la **cicloide** ha fascinado tanto a los matemáticos. Tanto es así que mereció por parte de Pascal un tratado específico, *Histoire de la roulette*. Sus

Catenaria: $y = a \operatorname{ch}(x/a)$



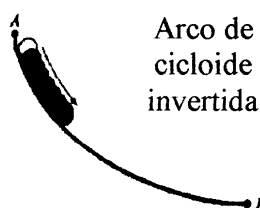
tangentes, la longitud de cada ciclo, la superficie que limita con OX y su propia gráfica fueron algunos de los centros de atención de los estudiosos. Como es sabido, la cicloide es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre una recta.

Así, Galileo, desprovisto de toda la potencia del aparato del cálculo infinitesimal¹ aún en ciernes, había llegado a ¡pesar! la superficie limitada por un arco de la cicloide para establecer la comparación con la del círculo que la genera, obteniendo la conclusión de que la triplicaba, conclusión correcta pero que no dejó muy

convencido al propio Galileo.

Uno de los problemas, motivo de disputa entre los hermanos Jaques y Jean Bernoulli, que viene a resolver la cicloide es el de la curva **braquistócrona**. Esto es, dados dos puntos situados a diferente altura y en distinta vertical, encontrar la trayectoria que produzca el deslizamiento más rápido entre ambos.

Dejándose llevar de la intuición, puede parecer que la trayectoria más rápida es la que corresponde al segmento rectilíneo determinado por



¹ la utilización de los infinitésimos, pero es Roberval quién consigue calcular el área que

ambos puntos. Sin embargo, como probó Jaques Bernoulli, lo es un arco de cicloide invertida construida entre origen A y el destino B.

UNA CURVA PARA CADA PROBLEMA.

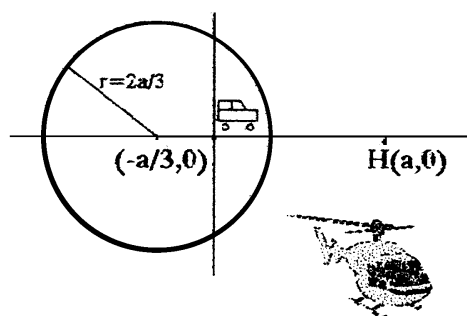
Un problema que asoma periódicamente y con mucha intensidad es el de los incendios forestales. Los recursos que se utilizan habitualmente para atajarlos son de dos tipos: por una parte están las patrullas dotadas de un auto-móvil todo-terreno; por otra, los helicópteros. En aras de optimizar los limitados recursos, el conflicto que surge de ordinario puede plantearse en los siguientes términos: *La velocidad del helicóptero contra-incendios es doble de la velocidad del auto todo-terreno de la patrulla. Ambos se encuentran a una distancia a entre ellos. Si la rapidez resulta definitiva cuando surge el incendio, ¿cuál ha de ser la distribución adecuada de zonas de atención?*

Eligiendo la referencia de la figura (origen en el destacamento de las patrullas y eje OX sobre la recta que lo une con la base de los helicópteros) todo puede reducirse a la comparación entre los tiempos

$t_p = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v}$ y $t_H = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{2v}$, empleados en llegar a un punto genérico P(x, y) por la patrulla y el helicóptero, respectivamente.

Al realizar las oportunas simplificaciones en la inecuación $t_p \leq t_H$, resulta que una **circunferencia** marca el límite de acción de ambos, ya

que se obtiene la expresión: $\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{2a}{3}\right)^2$.



La curva **clotoide** es conocida también como **espiral de Cornu**², o de **Euler**, ya que aparece citada por primera vez en el año 1774 en una de sus numerosas obras. Esta curva es utilizada en la construcción de carreteras aún más que la **lemniscata**.

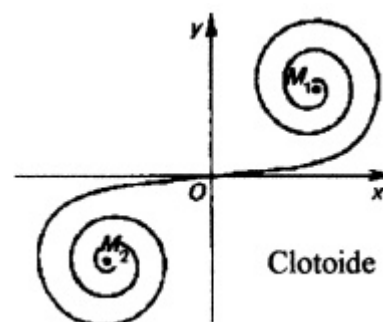
Al respecto, su particularidad más interesante tiene que ver, como en el caso de la lemniscata de Bernoulli, con su radio de curvatura:

$R = \frac{a^2}{s}$ (a constante y s longitud de arco). Como se deduce de su

expresión, el radio de curvatura oscila entre 0 (en los puntos asíntóticos M_1 y M_2) e ∞ (en el origen), pasando con continuidad por todos los valores intermedios. Este hecho, unido a sus cualidades estéticas, hace que sea la elegida como **curva de acuerdo** por los organismos competentes³, ya para enlazar tramos rectos entre sí, ya rectos con curvos, como curvos entre sí.

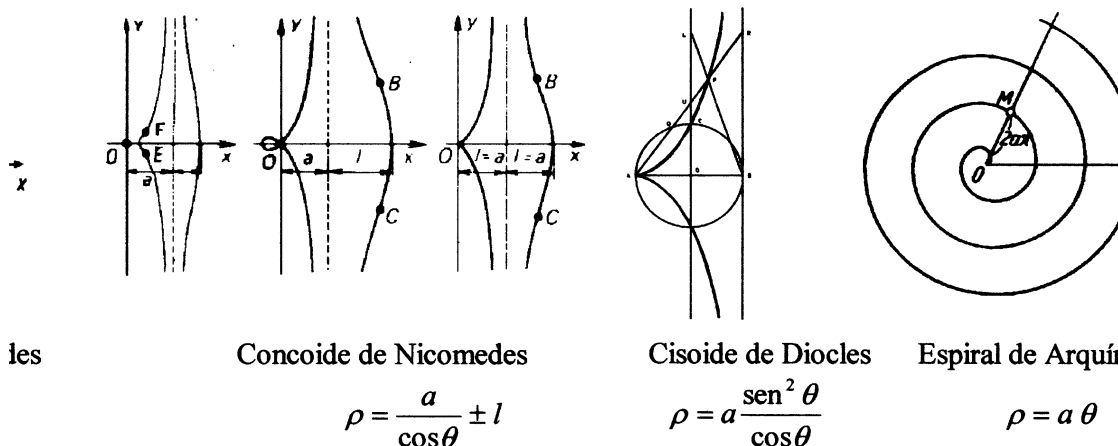
CURVAS RESOLUTORIAS Y FORMAS DE LA NATURALEZA.

Dejando a un lado el caso del V postulado de Euclides, pocos temas han ocupado con tanta intensidad a los matemáticos como los tres problemas legendarios: duplicación del cubo, trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Desde la antigüedad griega proliferan los intentos, siempre infructuosos, de resolverlos acomodándose al carácter geométrico de los mismos, lo que se traduce en el uso exclusivo de la regla y el compás.



² Físico francés que hizo uso de la citada curva para estudiar la difracción de la luz.

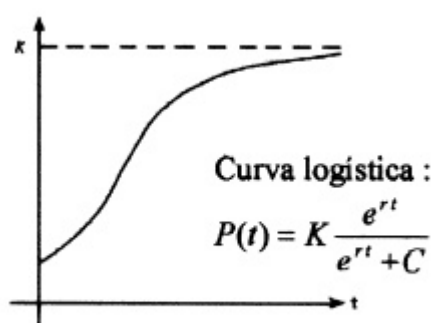
³ MOP Dirección General de Carreteras y Caminos Vecinales. Norma 3.1 - I. C.



Puesto que hasta el siglo XIX no se concluye la imposibilidad de resolución de aquellos problemas conforme a la citada norma euclídea, todas las soluciones ideadas hasta entonces utilizan recursos adicionales, surgiendo de este modo las curvas resolutorias. La **cisoide** –hoja de hiedra– fue ideada por Diocles para resolver el conocido problema de Delos de duplicación del cubo. Otros casos son los de Nicomedes con la **conchoide** –concha de mejillón– o el de Arquímedes con su **espiral**, con las que consiguen sendas soluciones para trisecar el ángulo. Curiosamente todas ellas evocan conocidas formas de la naturaleza.

CURVAS Y DEMOGRAFÍA

Las curvas, portadoras de su propio lenguaje gráfico, non son una excepción en cuanto a su uso como modelos matemáticos. Todas las ciencias hacen uso de curvas particulares para explicar los fenómenos que le son propios.



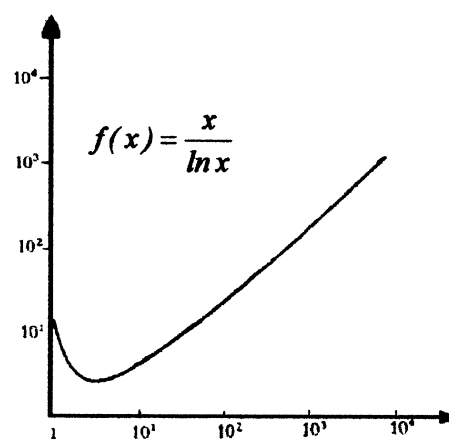
estancamiento. Esta situación se ajusta al comportamiento de la conocida como **curva logística**.

CURVAS PARA REALIZAR RECUELTOS.

Ya Euclides había probado que la relación de números primos era infinita. La sencillez y elegancia de su demostración consiguieron no sólo que hoy siga vigente, sino que se le considere como paradigma de la demostración indirecta.

Olvidando a Euclides pero sin perder de vista la cuestión, dando un gran paso en el tiempo, nos encontramos con una conjetura formulada por Gauss, orientada a conseguir una aproximación de la cantidad de números primos que son menores o iguales que un número prefijado. Esta cantidad se simboliza de forma habitual a través de la función $\pi(x)$.

La citada hipótesis⁴ hace uso de otra función $f(x) = x/\ln x$, que representa un infinito equivalente a $\pi(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$. Ante la imposibilidad de precisar cantidades infinitas, la correspondiente curva nos permite hacernos una idea siquiera gráfica de la interminable e irregular nómina de los números primos.



⁴ La rigurosa demostración hubo de esperar, ya que fue realizada en 1896 por Hadamard y Vallee-Poussin, de manera independiente.

BIBLIOGRAFÍA.

- BOYER, C. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.
- COLLETE, J. P. (1991): *Historia de las Matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.
- LARSON, R. E. y HOSTETLER, R. P. (1994): *Cálculo y Geometría Analítica*, McGraw-Hill, Madrid.
- SIMMONS, G. F. (1993): *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, Madrid.
- STRUİK, D. J. (1973): *Geometría diferencial clásica*, Aguilar, Madrid.