

LA ODISEA COMBINATORIA

M^a Jesús Casado Barrio

“La profesora de Ciencias se encuentra en el pasillo del Centro con la de Matemáticas...”

- *¡Chica, que bien te lo pasas!, ¿para qué son esos cubitos que llevas ahí?*
- *Son para explicar la combinatoria.- Su cara pasa de la sonrisa al desagrado.*
- *¡Que rollo!, siempre la odié. Supongo que porque no la entendía. Y eso que la volví a dar en la carrera. No veas qué alivio sentí cuando aprobé aquel examen ...”*

Sin duda estamos todos de acuerdo en que dominar los **problemas de recuento** entraña cierta dificultad. Existen formas estándar de representación que son los diagramas de árbol (**D.A.**) pero en muchos casos éstos no son evidentes. Un mismo diagrama puede provenir de enunciados completamente distintos y puede haber elementos subyacentes que no son triviales en su interpretación. También es cierto que hasta ahora el tema se abordaba centrándose en los problemas del orden y la repetición, cuando lo verdaderamente difícil es la interpretación del enunciado.

Por otro lado, tampoco hay, como ocurre en otros temas, una programación en espiral, una preparación en cursos anteriores que haga más sencilla su comprensión al llegar a 4º de E.S.O. o 1º de Bachillerato.

Ciertamente debe haber un modo de desglosarlo en pequeñas etapas que se puedan afrontar a distintas edades o niveles, lo que también nos proporcionaría una base para hacer diversificaciones curriculares dentro del aula.

De esta reflexión, ya hace tiempo, partió el estudio que se presenta. Una idea que seguramente se podrá mejorar con posterioridad, y que está basada en el análisis de las dificultades que entrañan los distintos tipos de enunciados que llevan a un recuento:

1. *¿Qué conjuntos intervienen en el problema?*
2. *Si hay varios, ¿cuál de ellos es el que vamos a seleccionar? ¿cuál es el que aparece en el D.A.?*
3. *¿Cuáles son los elementos que se consideran distintos o iguales? ¿cómo influye el nº de éstos? ¿trabajamos siempre con todos?*
4. *¿Qué significa la repetición, es un mismo elemento o son varios?*
5. *¿Dónde está el orden?*
6. *¿Cómo se pasa del enunciado al D.A.?*
7. *¿Cómo se interpretan en éste las soluciones?*
8. *¿Cómo son los problemas que no tienen fórmula?*

También hay otras preguntas de tipo más general que deben ser tenidas en cuenta

1. *¿Cuáles son los conocimientos previos que los alumnos tienen del tema?*
2. *¿En qué situaciones de la vida real aparece?*
3. *¿Qué materiales podemos utilizar para su introducción?*
4. *¿Qué relación guarda con otros temas del currículo, tanto anteriores como posteriores?*
5. *¿Qué es lo realmente básico y necesario que todos deberían aprender?*

Las repuestas no son fáciles pero podemos aventurarnos a dar algunas.

Desde que, al comienzo del día seleccionamos la ropa que nos pondremos, hasta cuando tomamos el autobús, o ponemos la mesa, o cuando colocamos los armarios, estamos

“*haciendo combinatoria*” (sabemos que tenemos 3 tipos de cubiertos y escogemos uno de cada clase para comer, ambas son **pautas de ordenación**, “**formar clases**” y “**elegir un elemento de cada una**”).

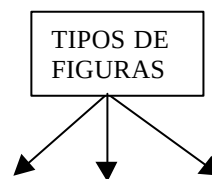
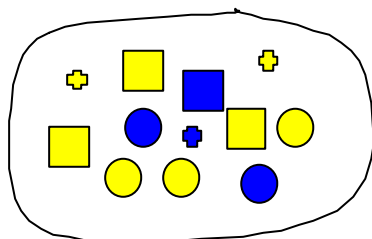
Pero nuestra tendencia general es a **agrupar objetos iguales (1ª pauta)**, no a separarlos. Así los libros de la estantería los ponemos por tamaños, por cursos, o por materias, siempre por características comunes, sólo en raras ocasiones hacemos “**mezclas**” (2ª pauta); más raro todavía es que hagamos más de una mezcla, pero lo que es casi inverosímil es que probemos a hacer todas las mezclas distintas que pueden aparecer, haremos las que necesitemos y nada más.

Con estos antecedentes **¿cuál es la lógica de una gran parte de los problemas de combinatoria?**. En cierto modo prever lo que puede pasar cuando se unen varios eventos. Aunque yo no pruebe todos los casos es seguro que entre un gran número de personas si ocurrirán, por eso puede haber alguien que acierte la quiniela o la primitiva, aquí es donde enlaza con la probabilidad. También puede ayudarnos a tomar una decisión ya que, conocer todo lo que puede ocurrir, me servirá para estar preparada cuando uno de los sucesos acontezca.

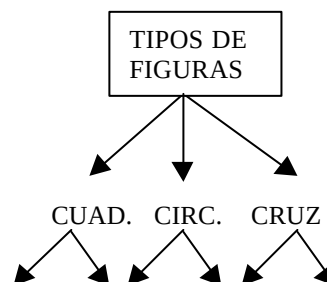
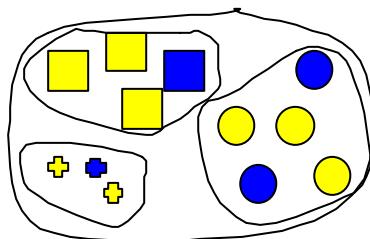
🔪 Buscando este nexo con la forma de proceder natural (1ª pauta) y la sencillez podemos empezar con **ejercicios de agrupaciones. (Nivel 1)**.

Se parte de un conjunto con varios elementos que tienen algunas cualidades comunes y se hacen subconjuntos siguiendo esas características. Después se representan en un D.A. las distintas clasificaciones siguiendo un orden inclusivo y se hace un recuento de los tipos de elementos encontrados. La dificultad está en la cantidad de clases que aparezcan, en que se digan o no de antemano los criterios a seguir (forma, tamaño), y en que aparezcan o no las mismas cualidades dentro de cada grupo, con lo cual sale un diagrama con el mismo nº de ramas en cada punto o con distinto nº. En un primer momento podemos trabajar con objetos tangibles como regletas o figuras y más adelante sobre el papel.

Ej 1. *En el siguiente conjunto agrupa los elementos por su forma. ¿Cuántos subconjuntos has obtenido?. Escríbelos en este “árbol”*



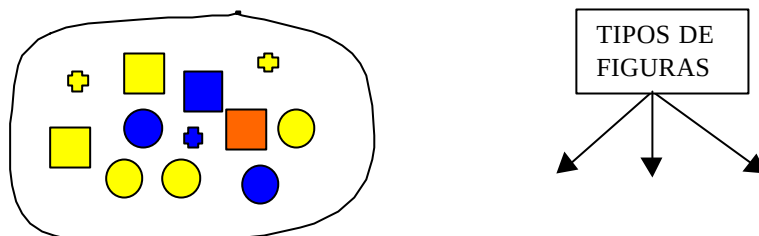
Dentro de cada subconjunto agrupa de nuevo por colores. ¿Cuántos colores distintos hay?. Anótalos en el diagrama.



¿Cuántos tipos de figuras hay?, ¿coincide con el n° total de figuras? ¿por qué?

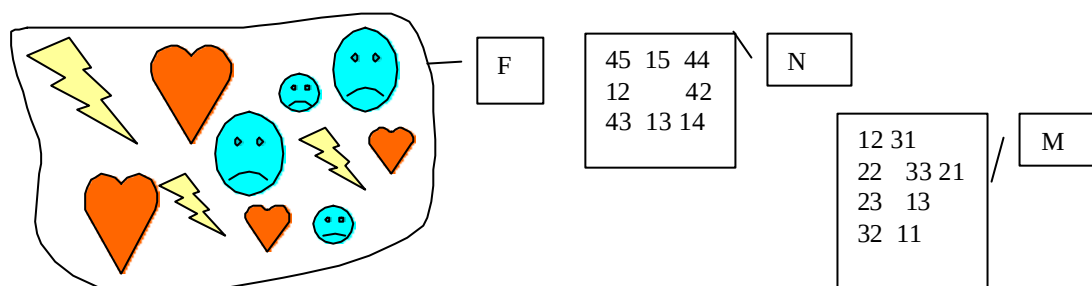
- En este primer contacto con el D.A. debemos observar que su finalidad no es representar elementos, sino cualidades de éstos. Si llamamos $A = \text{"Forma"} = \{\text{cuadrados, círculos, cruces}\}$ y $B = \text{"Color"} = \{\text{amarillo, azul}\}$, lo que representamos es el **producto cartesiano $A \times B$** .
- Igualmente $B \times A$ daría respuesta a los tipos de figuras.

Ej 2. Repite el ejercicio anterior con este conjunto.



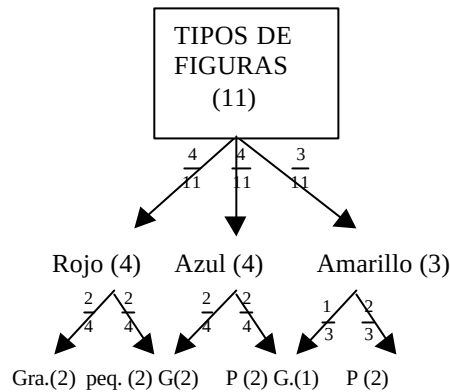
Aquí ya **no** se cumple la multiplicatividad del diagrama. El cuadrado rojo introduce una categoría más que los círculos y las cruces no poseen. El recuento será en parte **aditivo**.

Ej 3: Haz subconjuntos de estos conjuntos siguiendo los criterios que te parezcan mejores. Realiza después el diagrama clasificadorio. (Diagrama de árbol)



- El conjunto "M" se diferencia de los casos anteriores en que los números que forman las unidades y las decenas coinciden. Por tanto si $A = \text{"Decenas"} = \{1, 2, 3\}$ y $B = \text{"Unidades"} = \{1, 2, 3\}$ podemos considerar que $A \times B$ es como si fuese $A \times A$ con la matización de que, aunque como conjuntos son iguales porque tienen los mismos elementos; en las soluciones, y por tanto en el D.A., representarán distintas clases, la de las unidades y la de las decenas. Las filas de éste **no son conmutativas** Ya que tienen un contenido subyacente, el que utilizamos en nuestro sistema de numeración, **la posición**.

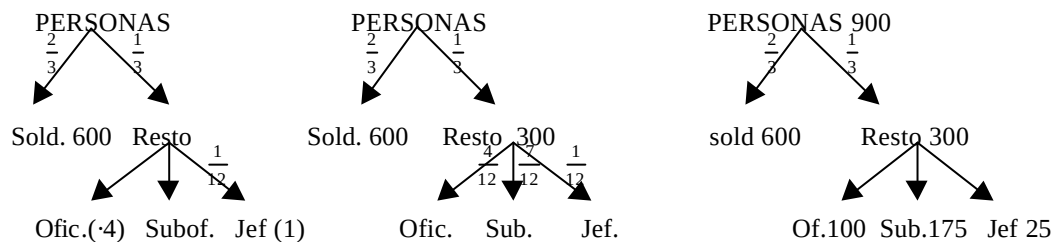
Este modo de dividir los elementos de un conjunto coincide con el concepto de **fracción como operador**, o **como relación entre dos cantidades**, así podemos decir que cuatro onceavos de los objetos anteriores son rojos. El D.A. con unas pequeñas modificaciones aporta una herramienta nueva y útil para trabajar en este contexto.



Sin entrar en detalles, podemos ver un ejemplo de este modo de resolución en un contexto de tipo aritmético y algebraico.

Ej. 4. En un cuartel los $\frac{2}{3}$ de las personas que hay son soldados y el resto son oficiales, suboficiales y jefes. El nº de jefes es $\frac{1}{12}$ del resto y el nº de oficiales es cuatro veces mayor que el nº de jefes. Halla el nº de personas que hay de cada categoría sabiendo que hay 600 soldados.

Solución:

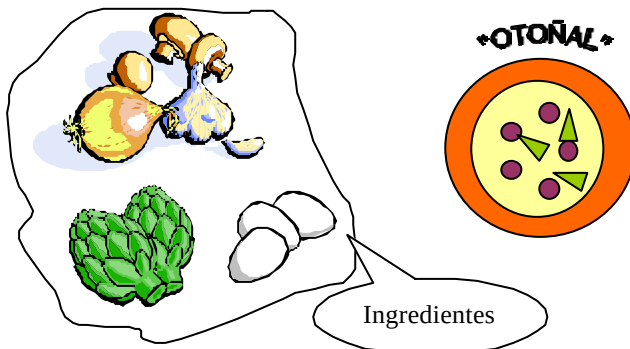


Los cálculos no se incluyen puesto que son obvios, simplemente hacer notar la similitud entre este tipo de planteamiento y el que se hace cuando trabajamos con probabilidades condicionadas.

Podemos “explotar” aún más esta fase inicial introduciéndonos en el mundo del muestreo. Ya sabemos **clasificar por afinidades** (1ª pauta), pero en la vida real no se acaba ahí el trabajo. Según vimos, el 2º paso es “la mezcla”. Sin ahondar demasiado se pueden hacer pequeñas incursiones como la que sigue.

Ej. 5. Preparando pizzas.

Don Corleone prepara pizzas que además del tomate y el queso llevan dos ingredientes que las caracterizan. Ayuda a Don Corleone a redactar “La carta” (te damos una pista preparando la primera). Invéntate tú los nombres y los precios.



INGREDIENTES.....	PRECIO
“Otoñal”Alcachofas y champiñones	900pts 5,4 euros
.....	
.....	

¿Crees que sería útil hacer un diagrama de árbol? ¿qué diferencias ves entre este ejercicio y los anteriores? Busca formatos adecuados para clasificar los tipos de pizzas.

🔪🔪 El 2º paso (**Nivel 2**) sería **plantear el problema a la inversa**. Nos dan los criterios de distinción de elementos y formamos con ellos el conjunto total aunque, claro está, eso no nos da su cardinal.

Ej. 6. En una fábrica de vestidos trabajan con telas de varios colores, rojo, verde y azul, y en tres formatos, lunares, rayas y cuadros. ¿Cuántos tipos de vestidos pueden fabricar?

Solución:

$A = \{\text{rojo, verde, azul}\}$ $B = \{\text{Lunares, rayas, cuadros}\}$

$A \times B = \{(\text{rojo, lunares}), (\text{rojo, rayas}), \dots, (\text{azul, cuadros})\}$, $3 \times 3 = 9$ tipos de vestidos

En este nivel se trabaja directamente con los productos cartesianos, bien de conjuntos distintos o de un conjunto por sí mismo (más difícil de entender). El resultado final es bien sencillo, el producto de ambos cardinales, y esto es suficiente para muchos problemas elementales de probabilidad, como lanzamiento de monedas o de dados.

Ej. 7. El resultado de un partido de fútbol puede ser, según la quiniela, de 3 tipos, 1,x,2. Si se juegan dos partidos, ¿Qué parejas de resultados pueden darse? ¿A qué producto cartesiano corresponde?

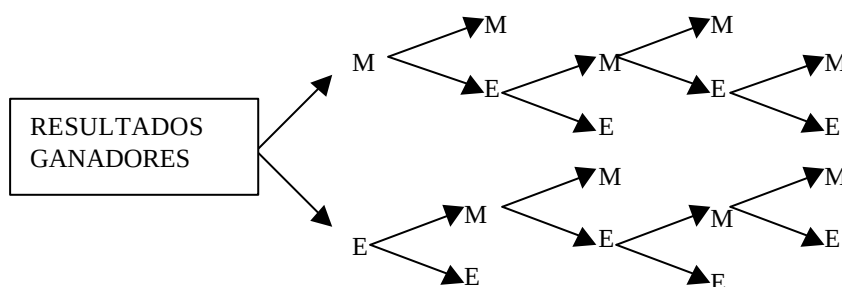
Analiza lo que ocurriría si fuesen 3 o más partidos.

Hay que destacar que **todos los conjuntos que forman el producto aparecen siempre reflejados en el diagrama de árbol**, coincidiendo el nº de filas con el de factores.

Aumentado la dificultad podemos plantear algún enunciado condicionado en que según el camino que tomemos del árbol aparece uno u otro conjunto.

Ej. 8. Marcos y Enrique participan en un torneo de tenis. La primera persona que gane dos juegos seguidos o que complete tres gana el torneo. Haz un D.A. que muestre los posibles resultados del torneo.

Solución:



🔪🔪🔪 En la época conjuntista se explicaba la combinatoria por medio de **aplicaciones**. Pasada “la fiebre” se rechazaron la mayor parte de estas ideas, sin embargo algunas de ellas no debieron quedar en el olvido.... **Nivel 3:**

Ej.9. *¿De cuántas formas podemos repartir un chicle un caramelo y una chocolatina entre 6 niños, dando una sola chuchería a cada uno?*

Este enunciado nada tiene que ver con los anteriores. No se trata de buscar similitudes o de hacer mezclas para formar vestidos, se trata de escoger chucherías ... ¿o tal vez niños?. Es un **problema de asignación**.

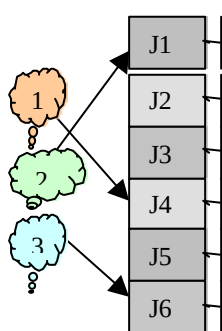
Un grupo importante de enunciados es el que tiene que ver con las aplicaciones que se establecen entre dos conjuntos. La primera dificultad es buscar quién es el conjunto de partida, que para cumplir la condición de aplicación será el que utilice en una solución todos sus elementos de forma única. La segunda es determinar el tipo de aplicación que será biyectiva o inyectiva en los casos más sencillos.

No se trata de volver al pasado trabajando el tema solo con estos conceptos, sino de aprovechar la imagen visual que nos dan los diagramas de Venn y las flechas, ya que es el modo más asequible de hacer la 1ª interpretación. Tal vez una parte del alumnado esté interesado en profundizar un poco más, en ese caso podemos satisfacerles.

Si la aplicación se establece de modo correcto, el **conjunto inicial** aporta el “orden” (al igual que antes lo hacían unidades y decenas), su papel es tan “discreto” que en muchos problemas no aparece como tal (“modos de escoger 3 jaulas”); y el **conjunto final** los “**elementos a escoger**”. Recordemos que en el producto cartesiano todos los conjuntos que intervenían tenían la misma importancia.

Como figura de transición hacia el D.A. utilizamos una tabla de doble entrada para representar cada aplicación. En columnas, el conjunto de partida, en filas el de llegada. Las cruces en las casillas hacen el papel de las flechas. De aquí se obtiene un vector solución, que se ha puesto en columnas por preferir la utilización vertical del Diagrama. Todos los vectores solución conforman el D.A. que, lógicamente sólo tiene elementos de este 2º conjunto. El 1º subyace en cada fila.

Ej. 10. *¿Cuántas maneras hay de colocar 3 pájaros en 6 jaulas poniendo uno solo en cada una?*



		JAULAS					
		1	2	3	4	5	6
P A J	1				X		
	2	X					
	3						X

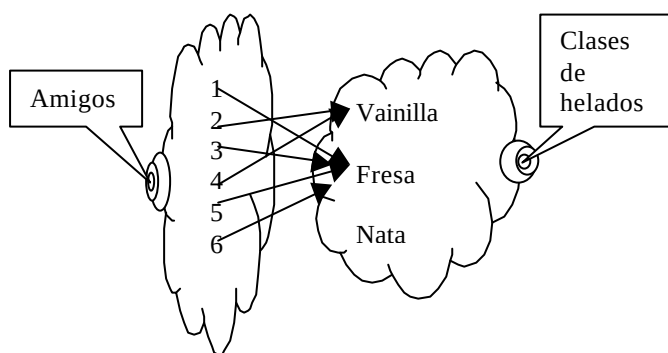
La asignación de un número a cada objeto permite un primer acercamiento al orden. En las tablas se ve con más claridad que la primera en ocupar fue la jaula nº 4, la 2ª la jaula nº 1 y la 3ª la nº 6, por lo tanto escogemos jaulas y no pájaros.

Abreviadamente: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Según la tabla, la 1ª cruz podría haberse marcado en cualquiera de las 6 columnas, la segunda sólo en las columnas 1 2 3 5 6, puesto que cada jaula lleva un único pájaro, la tercera cruz sólo en la 2 3 5 6, de ahí que el nº de colocaciones sea $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

En este ejemplo hemos puesto el caso más sencillo, una aplicación entre dos conjuntos A y B tales que **Card A < Card B**. Además ambos tienen todos sus elementos distintos. Pero no siempre es así. Puede ocurrir que tengamos 8 pájaros y 6 jaulas, esto implica que alguna jaula debe llevar más de un pájaro, (la jaula se “repite”), y en la tabla aparecerán más de una cruz en la misma columna. También podemos tener el mismo nº de pájaros que de jaulas, con lo cual si lleva uno cada una sería indiferente seleccionar uno u otro conjunto, o que haya el mismo nº pero queramos meter más de un pájaro en cada jaula, o que dos jaulas sean idénticas con lo cual sería imposible distinguir una de otra. Son tantos los casos que pueden aparecer que no podemos abarcarlos todos. Nuestro cometido es dar pautas de resolución que cada uno deberá ajustar en su momento. Señalar, eso sí, que si en el 2º conjunto hay varios elementos iguales generalmente trabajaremos con clases, en lugar de individuos, poniendo especial atención en que todas ellas tengan suficientes elementos (ver ej. 12).

Ej. 11. En una tienda tienen helados de vainilla, fresa y nata. Seis amigos entran en ella decididos a comprarse un helado cada uno. ¿Cuántos grupos distintos de 6 helados pueden comprar?



	V	F	N
1		X	
2	X		
3		X	
4	X		
5		X	
6		X	

Aunque los enunciados no tienen nada en común la respuesta es similar a la de la quiniela, ya que cada amigo puede escoger cualquiera de los 3 helados, independientemente de lo que eligiese el anterior. Se trata del producto cartesiano de $\{V, F, N\}$ por sí mismo 6 veces, por tanto hay 3^6 casos distintos.

Ej. 12. En una urna tenemos 3 bolas blancas y una negra. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al extraer dos bolas con reemplazamiento? ¿y sin reemplazamiento?

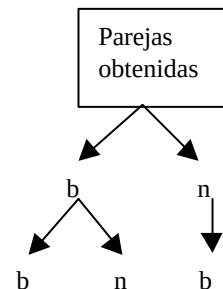
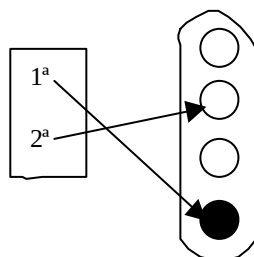
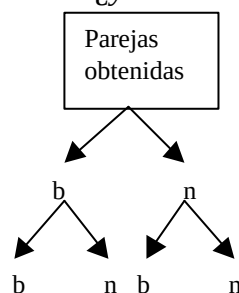
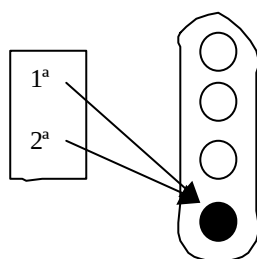
Con reemplazamiento:

	b	n
1ª		X
2ª		X

Sin

reemplazamiento:

	b	n
1ª		X
2ª	X	



En el primer caso no importa el n° de bolas que tiene la urna, ya que al haber reemplazamiento siempre disponemos de todas ellas, de nuevo es un producto cartesiano, pero en el 2° si interfiere el n° ya que la bola negra es única y una vez que ha sido extraída ya no queda ninguna de este tipo. Aquí no hay repetición en todas las clases puesto que no disponemos de un n° suficiente de elementos en cada una, se pierde la independencia que había antes entre el resultado de la primera extracción y el de la 2° . Es importante aclarar este punto antes de hablar de la repetición.

Finalmente “la combinatoria”. Nivel 4.

Si hemos seguido la secuencia anterior cuando llegamos a este punto ya hemos visto la mayor parte de los ejercicios de ordenaciones que se pueden plantear, y sin haber utilizado las palabras mágicas: **Variaciones, combinaciones y permutaciones, V, C, P**. Se pretendía evitar que un conocimiento de éstas antes de tiempo llevase a un tratamiento mecánico de las soluciones. Ahora sí, vamos a centrarnos en los enunciados básicos concernientes a las 3 formas de recuento.

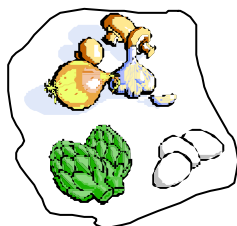
Los elementos **clave** son 2:

1. **El conjunto donde se lleva a cabo la selección.** ¿Cómo son sus elementos, todos distintos o hay algunos iguales (si es así agruparlos en clases)? Si sólo hay un conjunto no se plantean dudas, y si hay dos la representación con diagramas de Venn nos indicará cuál de ellos da el orden.
2. **El proceso selectivo.** ¿Cómo son las muestras, ordenadas o desordenadas? ¿Dentro de cada muestra hay elementos o clases que participen más de una vez? ¿Cuál es el tamaño de cada muestra?

La forma de abordarlos es la habitual, primero ejercicios sencillos en los que el **conjunto de selección** tiene todos sus **elementos distintos** que se utilizarán en cada **muestra ordenada** de modo único. Las soluciones se llevan a un D.A. que nos ayuda a encontrar la fórmula (problema de las jaulas, ej. 10). Una vez conocidas Permutaciones y Variaciones, y por tanto el n° factorial, se continúa con **muestras desordenadas** para llegar a las combinaciones (problema de la Pizza, ej. 5). Finalmente se introduce la **repetición** tomando conjuntos que, o bien tienen suficiente número de elementos en cada clase (problema de los helados, ej. 11), o bien, se reutilizan éstos una y otra vez, “reemplazamiento” (ej. 7).

Es fácil identificar los ejercicios de $V_{n,r}$ y P_n con las aplicaciones que hemos visto, tomando como conjunto inicial $A = \{1, 2, 3, \dots, r\}$. También las $VR_{n,r}$ son el producto cartesiano de un conjunto de cardinal n realizado r veces.

Las combinaciones $C_{n,r}$ tienen la fórmula más complicada, sin embargo hay una forma de relacionarlas con las permutaciones con repetición. Si pensamos en la elección de la muestra como la división del conjunto total en 2 subconjuntos, el de “los elegidos”= E , que forman parte de esta, y los “no elegidos”= E' , se trata de formar n -tuplas en las que E aparece r veces y E' , $n-r$ veces. **Ej.5.**



“OTOÑAL”		
	E	E'
CH	X	
AJ		X
CE		X
AL	X	
HU		X

$\left(\begin{array}{c} E \\ E' \\ E' \\ E \\ E' \end{array} \right)$

Puesto que es más sencillo pensar en una combinación como la partición en dos subconjuntos este formato $C_{n,r} = PR_n^{r,n-r}$ puede ayudar a afianzar el concepto y aclarar la fórmula.

¿Y la de las combinaciones con repetición, cómo podemos llegar a ella?

La idea básica es la siguiente, **cada repetición funciona como un elemento nuevo** (el repetido) **que tiene que combinarse con todos los demás**.

Ej. 13. *Un niño sediento tiene ante sus ojos una máquina de refrescos. Ésta tiene Coca Cola, agua y fanta de naranja. Decide comprarse dos refrescos, ¿cómo puede ser esta pareja?*

	Coca y ag		Coca y Fa		Ag y Fan		Dos Coc		Dos Ag		Dos Fan	
	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'	E	E'
CC	X		X			X	X			X		X
A	X			X	X			X	X			X
F		X	X		X			X		X	X	
1ª R		X		X		X	X		X		X	

$$PR_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$C_{4,2} = CR_{3,2}$$

¿Y si decide comprarse 3?

	C,A,C		C,A,A		C,C,C	
	E	E'	E	E'	E	E'
CC	X		X		X	
A	X		X			X
F		X		X		X
1ª R	X			X	X	
2ª R		X	X		X	

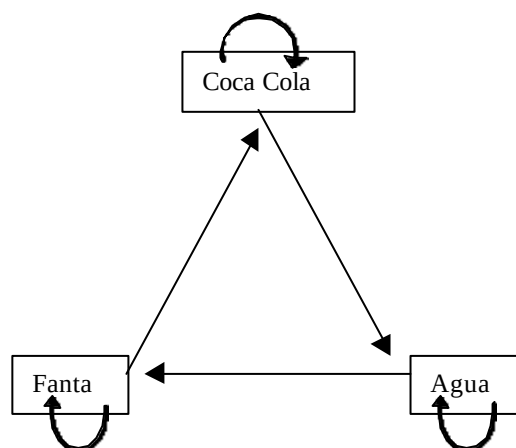
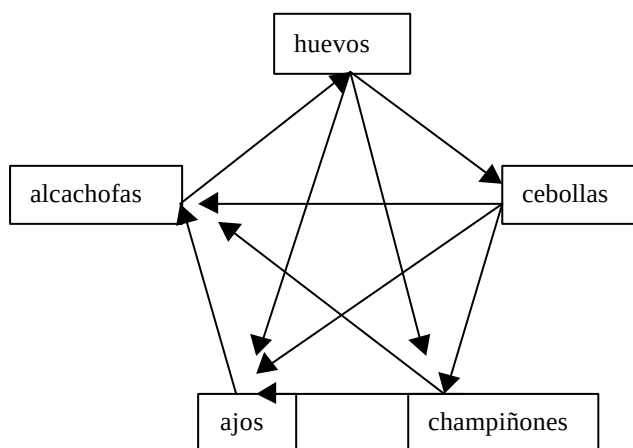
Si escogemos 3 elementos, dos de ellos pueden ser repeticiones. La 1ª se referirá a uno de los elementos seleccionados, y la 2ª al otro.

Si sólo habíamos seleccionado uno, ambas se refieren al mismo.

$$PR_5^{3,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

$$C_{5,3} = CR_{3,3}$$

Por otro lado, si estamos interesados no sólo en el **nº de casos**, sino en su **forma** podemos ayudarnos de un sencillo diagrama. Se trata de dibujar un polígono con tantos vértices como elementos, y también sus diagonales. Tanto éstas como sus lados serán flechas con una sola dirección. Esto garantiza que en un mismo recorrido pasemos una sola vez por cada una (para evitar el mismo recorrido en distinto orden). Siguiendo éstas, y solo en las direcciones que permitan las flechas, recorreremos tantos vértices como elementos tenga la muestra no ordenada. La repetición se indica con una flecha circular en el vértice.



Este tipo de diagramas son más adecuados para las combinaciones que el diagrama de árbol, aunque si la figura tiene más de 5 vértices también tiende a complicarse.

Si queremos llegar al “**más difícil todavía**” podemos proponer ejercicios en los que, **en el subconjunto no seleccionado se haga una nueva selección**, bien del mismo modo que la anterior o de modo distinto; es decir, hacer $C \cdot C$, o $C \cdot V$...

Aquí se aplica generalmente el principio multiplicativo.

Ej. 14. Tenemos una urna con 7 bolas numeradas del 1 al 7. ¿De cuántas maneras podemos sacar primero 2, después 3 y finalmente 2?

a) Si damos importancia al orden de extracción.

b) Si no damos importancia al orden.

Solución:

	1	2	3	4	5	6	7
1ª			X				
2ª						X	
1ª		X					
2ª					X		
3ª				X			
1ª							X
2ª	X						

Primero escogemos 2 bolas de 7, lo cual nos lleva a:

a) $V_{7,2}$ b) $C_{7,2}$

Después solamente nos quedan 5 bolas de las que tomaremos 3:

a) $V_{5,3}$ b) $C_{5,3}$

Por último nos quedan dos:

a) $V_{2,2}$ b) $C_{2,2}$

El resultado de las tres selecciones ((3,6) (2,5,4) (7,1)) está formado por una “pareja de la 1ª” = **A**, una “terna de la 2ª” = **B** y una “pareja de la 3ª” = **C**.

Si las representásemos por A= “Triángulos”, B= “círculos” y C= “Cuadrados” serían de la forma (**▲**, **○**, **□**). Cada triángulo se combinaría con todos los círculos y cuadrados, lo que corresponde al producto cartesiano **AxBxC**.

Por tanto el resultado final será:

a) $V_{7,2} \cdot V_{5,3} \cdot V_{2,2}$ b) $C_{7,2} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2}$

Ambos casos tienen simplificación.

a) $(7 \cdot 6)(5 \cdot 4 \cdot 3)(2 \cdot 1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = P_7$ cuestión obvia, dándole una nueva interpretación al enunciado.

b) $\binom{7}{2} \binom{5}{3} \binom{2}{2} = \frac{7!}{2!5!} \frac{5!}{3!2!} \frac{2!}{2!0!} = \frac{7!}{2!3!2!}$ Fórmula empleada para las “**Particiones ordenadas**” de un conjunto” (el orden se refiere al que tienen entre sí A, B y C).

 Concluimos este apartado diciendo que no es necesario dar todos los pasos anteriores para tener una visión global del tema. En el siguiente cuadro resumen junto con los distintos niveles se exponen dentro de cada uno 3 fases, una de **Introducción**, más que suficiente en algunos casos, y que se puede trabajar con actividades manipulativas, una de **Desarrollo**, que corresponde a un nivel de comprensión normal y una de **Perfeccionamiento** que no está al alcance de todos o que simplemente no entra dentro de sus intereses; queda a juicio del profesor su distribución en el tiempo.

	INTRODUCCIÓN Se emplean materiales como regletas, figuras, gomets ... (Ver y tocar)	DESARROLLO Trabajar sobre el papel (Ver)	PERFECCIONAMIENTO
NIVEL 1: “Afinidades” - Se parte de un conjunto del cual se hacen subconjuntos, y de nuevo éstos se dividen según criterios prefijados. - los elementos se ven	- Agrupar los elementos por sus características comunes - Hacer D.A. de los subconjuntos - Contar los tipos de elementos encontrados y observar que puede no coincidir con el cardinal del conjunto.	Lo mismo que en el recuadro precedente, solo que los objetos aparecen dibujados. Hay también números, palabras ..., objetos no tangibles. Se obtienen D.A. con filas conmutativas, es multiplicativo.	Las cualidades que forman los subconjuntos no son conmutativas, es decir no aparecen los mismos casos en cada subconjunto (ej. no hay el mismo n° de colores en cada tipo de figura ...) Aparecen D. A. no conmutativos. El recuento se hace sumando.
NIVEL 2: “Producto Cartesiano” “Inverso” del anterior. - Nos dan los criterios de distinción de elementos y formamos el conjunto total. - Los elementos no se ven - Intervienen todos los elementos de ambos conjuntos. A y B quedan explícitos en el D.A.	- Cada tipo de criterio forma un conjunto. Por ejemplo A= “tamaño”, B= “Forma”. El producto cartesiano AxB nos da los tipos de elementos que podemos encontrar, pero no cuántos hay - Hacer el D.A. de AxB. Observar que tanto A como B están en el diagrama. - Contar los tipos de elementos.	No se dan de forma explícita los criterios o sus elementos y hay que averiguarlos (ej. Resultados que pueden aparecer al lanzar dos monedas)	El segundo criterio a emplear depende del elemento seleccionado con el primer criterio. (ej. Lanzar una moneda y si sale cara lanzar un dado, o tener triángulos y cuadrados y distintos colores en cada caso, juegos condicionados ...)
NIVEL 3: “Aplicaciones” - Formar aplicaciones inyectivas entre dos conjuntos A y B tales que Card A < Card B. - Puesto que A es el conjunto inicial, no intervienen todos los elementos de B. - Orden y repetición son contenidos implícitos, no aparecen en ningún enunciado de modo directo. - Sólo B aparece en el D.A.	Cada conjunto tiene todos sus elementos distintos. - Representar la aplicación con dos diagramas de Venn y flechas - Convertir ésta en una tabla de doble entrada poniendo A en columnas y B en filas. Marcar con una “x” los elementos relacionados entre si - Pasar de la tabla a un vector columna con los elementos de B seleccionados. A queda “oculto” en el orden de éstos. - Hacer un D.A. con todos los posibles vectores. - Contarlos.	B tiene elementos iguales, pudiendo completar cada grupo una aplicación. - Se forman “clases” con éstos elementos y se trabaja con ellas. - Se repiten los apartados 1 a 4 del recuadro anterior observando que en la tabla de doble entrada pueden aparecer varias cruces en la misma columna. - Relacionar con el recuadro superior: Producto cartesiano de un conjunto por si mismo. - Identificar con el caso de aplicaciones no sobreyectivas.	Estudiar lo que ocurre sí: - Card A=Card B o si Card A>Card B - El n° de elementos de alguna de las clases no es suficiente para que esta aparezca de modo único en una solución. (Podemos repetir el modelo de trabajo pero teniendo en cuenta que el n° de cruces que aparecen en una columna (clase) no puede superar el n° de elementos que hay de ese tipo. El D.A. también es irregular dentro de cada fila y el recuento de casos puede no ser multiplicativo.)
NIVEL 4 : V, C y P - Partimos de un solo conjunto que hará el papel del B. - En el enunciado se tratan explícitamente el orden y la repetición. - Buscamos la conexión con aplicaciones y producto cartesiano.	Partimos de un conjunto finito de elementos distintos. - Ordenar una parte de ellos. - Relacionar con el recuadro superior, ¿quién es A? - Encontrar la fórmula de las Variaciones. - Repetir 1 y 2 pero ordenando todos los elementos del conjunto. - Encontrar la fórmula de las Permutaciones. Si no se ha hecho antes hablar del “factorial”. “Partir” el conjunto B en 2 subconjuntos de cardinal fijo, E y E'. (E χ E' = B) - Buscar otras divisiones de este tipo e intentar deducir la fórmula a partir de las dos anteriores. Introducir el T.T. y sus propiedades.	Repetir el proceso de los recuadros precedentes pero en lugar de trabajar con elementos, con “clases”. - Las C pueden tratarse como P de los elementos de dos clases la del “primer conjunto=(Elegidos)” y la del “2º conjunto=E' (no elegidos)”. Puede hacerse una tabla de doble entrada poniendo en columna el conjunto total y en fila E y E'. Las colecciones “E...EE'” relacionan C y PR. - Las VR son el producto cartesiano del conjunto de clases por sí mismo y ya fueron estudiadas. - CR. Además de las clases prefijadas hay una más por cada repetición. Con esto y el punto 1 puede llegarse a la fórmula	Valorar si son o no útiles las fórmulas en los ejercicios de los recuadros superiores. Trabajar problemas con varios tipos de selección: - Resolver por separado cada una. - Unirlas tratando cada tipo como un conjunto distinto y observar como es la relación que el enunciado establece entre ellas. (Multiplicativa, aditiva ...)

- **Y después de haber recorrido varios puertos, para conformar esta Odisea, un último arribaje ...**

Uno de los libros más completos que hasta ahora se han editado en nuestro país sobre la didáctica de la Combinatoria es el título **“Razonamiento Combinatorio”**, que ha llegado a mis manos cuando ya había redactado las páginas anteriores. En él se relatan, de manera brillante y pormenorizada todas las conexiones que ésta tiene con distintas partes de La Matemática y de otras Ciencias, cuál ha sido su evolución a través de la historia y las principales Investigaciones, cuáles son los fundamentos didácticos de su enseñanza y sus implicaciones curriculares y un amplio apartado referente a la metodología con los modelos de problemas que podemos encontrar así como sus representaciones, y la forma de abordar éstos en el aula haciendo una detallada exposición por niveles y edades.

¿Qué más queda por decir?, seguramente, nada. Para las personas que hayan leído el libro no habrá nada de interés en el presente artículo. Pero quizás, para los que aún no lo conozcan, pueda servir como punto de partida para su lectura. La necesidad de buscar respuestas a nuestras preguntas es lo que nos lleva a trabajar para su descubrimiento, bien por nosotros mismos o con la ayuda de expertos en la materia. Pero es bien cierto que no encontraremos lo que no estemos buscando, de ahí que primero debamos sentir la necesidad de asimilar tal conocimiento.

Nada mejor, pues, que terminar con unas citas del mencionado libro que nos invitan a la reflexión:

“Los problemas combinatorios constituyen un medio excelente para que los alumnos realicen actividades de matematización (modelización, representación, formulación, abstracción, validación, generalización...) y para proporcionar sentido a otras herramientas conceptuales básicas en la matemática actual”

“El diagrama de árbol es una representación icónica fundamental, porque visualiza la estructura multi-paso del experimento. Por ello, las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, proporcionan una interpretación clara de la estructura interior de los experimentos y el encadenamiento de sucesivos experimentos en un complejo mayor”

Según un trabajo de Fischbein y Gazit (1988) el orden adecuado para enseñar las distintas operaciones combinatorias sería: “Variaciones con repetición, permutaciones, variaciones ordinarias y combinaciones”

“Este autor (referido a Fischbein), ha señalado la importancia de cultivar la intuición matemática desde niño y el hecho de que la intuición combinatoria no se desarrolla espontáneamente”

“El tratamiento casi aislado que ha sido aplicado a la enseñanza del tema –excepción hecha de su relación con la probabilidad y el binomio de Newton- y el tratamiento pedagógico que habitualmente suele aplicarse –orientado hacia el aprendizaje de fórmulas y su aplicación a ejercicios rutinarios- ha hecho de él un **tema difícil para los alumnos y poco atractivo para los profesores**”

“Pensar desde el punto de vista combinatorio, requiere que los estudiantes exploren creativamente los aspectos estructurales de un problema con la esperanza de reducirlo, bien a un caso más simple o a otros problemas previamente resueltos. Como resultado, se analizan sistemáticamente muchas posibilidades de solución y se obtiene conocimiento útil, tanto de los intentos correctos como incorrectos. El proceso general realizado es el razonamiento combinatorio o **“el arte de contar sin contar”** (Townsend, 1987)”

BIBLIOGRAFÍA:

BATANERO M^a C., DÍAZ GODINO J., Y NAVARRO-PELAYO VIRGINIA. *Razonamiento Combinatorio*. Editorial Síntesis. Col. “Educación Matemática en Secundaria”, nº7. Madrid 1994.

VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 3º de E.S.O.*. Editorial S.M.. Madrid 1995.

VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 4º de E.S.O.*. Editorial S.M.. Madrid 1994.

COLERA, M. Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Anaya. Madrid 1996.

VIZMANOS, J.R. Y ANZOLA, M.: *Matemáticas 1º B.U.P.*. Editorial S.M.. Madrid 1991.

COLERA, M. Y OTROS: *Matemáticas 1º B.U.P.*. Editorial Anaya. Madrid 1987.

GONZÁLEZC C. Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Editex. Madrid 1995.

ABELLANAS L., Y OTROS: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Mc Graw Hill. Madrid 1996.

ARIAS, J. M. Y MAZA, I.: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Casals. Barcelona 1997.

EQUIPO ARRIXACA: *Matemáticas I.BACHILLERATO LOGSE*. Editorial Santillana. Madrid 1996.

ETAYO J. Y OTROS: *Matemáticas 1ºB.U.P.* Editorial Anaya. Madrid 1977.

GRANOUILAC, ANDRÉ: *Cómo comprender la estadística*. Editorial Ibérico europea de ediciones. Madrid 1978.

REINHARDT, F. Y SOEDER, H.: *Atlas de matemáticas 2* Editorial Alianza. Madrid 1996.

FREUND, J. E. Y SIMON, G. A.: *Estadística elemental*. Editorial P.H.H.. México 1992.

SIXTO RIOS: *Análisis estadístico aplicado*. Editorial Paraninfo. Madrid 1983.

LIPSCHUTZ. S.: *Probabilidad*. Editorial Mc Graw Hill. México 1995.

COL. “CUADERNOS DE APOYO PARA EL DESARROLLO DE LOS OBJETIVOS Y CONTENIDOS DE LA E.S.O.”: Nº 33. *Recuento de posibilidades y fenómenos de azar*. Editorial Arcada. Huesca 1997.

DÍAZ J. Y OTROS: *Azar y probabilidad*. Col. Síntesis nº 27. Madrid 1987.

MAZA C. Y ARCE C. : *Ordenar y clasificar*. Col. Síntesis nº 31. Madrid 1991.

CORIAT M. Y OTROS: *Nudos y nexos. Grafos en la escuela*. Col. Síntesis nº 21. Madrid 1988.

SANZ LERMA I. Y OTROS: *Por los caminos de la lógica*. Col. Síntesis nº 22. Madrid 1988.