

EL USO DE LA PARAMETRIZACIÓN COMO MODELO DE TRABAJO EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Juan Carlos Cortés López

Departamento de Matemáticas, I.E.S. Bonifacio Sotos

Juan Ángel Aledo Sánchez

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla La Mancha

Resumen

Proponemos un modelo de trabajo para iniciar en el aula el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales parametrizados. También mostramos cómo impulsar la destreza de "parametrizar" puede ayudar a salvar ciertas dificultades clásicas en la traducción a lenguaje algebraico mediante sistemas de ecuaciones.

Uno de los objetivos de Matemáticas II de 2º Bachillerato Logse es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales con parámetros (S.E.L.P.). Creemos que la introducción de este tema en el aula se realiza de un modo artificial, pues en la práctica docente (y en los textos) no se justifica la utilidad de estudiar este tipo de S.E.L., y se pasa directamente de los S.E.L. a los S.E.L.P.

La resolución del sistema paramétrico:

$$\begin{cases} x + ly = 1 \\ lx + y = -1 \end{cases}$$

cuya única solución, $\forall l \in \mathbb{R} - \{1\}$ es $x = \frac{-1}{l-1}$, $y = \frac{1}{l-1}$ permite resolver de una sola vez, infinitos S.E.L. de este modelo para cada l . Sin realizar más cálculos sabemos las soluciones de:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \xrightarrow{l=2} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 5x + y = -1 \end{cases} \xrightarrow{l=5} \begin{cases} x = \frac{-1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Pero esta razón es insuficiente para comprender la utilidad de los S.E.L.P. Para que los alumnos entiendan el sentido económico de la parametrización, es necesario que ellos experimenten la utilidad - para aliviar cálculos- de parametrizar los S.E.L.. Con este fin propusimos el siguiente problema, extraído de una clase de Resolución de Problemas con alumnos de secundaria:

Huevos de gallina y de pata (págs. 115-121 de (2))

Un huevero tiene 6 cestas con huevos, cada una de una clase, de gallina o de pata. En las cestas hay 6, 12, 14, 15, 23 y 29 huevos respectivamente. El huevero dice señalando una cesta: "si la vendo, me quedará el doble de huevos de gallina que de pata". ¿De qué cesta estaba hablando?.

Muchos alumnos resuelven el problema como en (2). Sin embargo, el empeño, casi "vulgar" de algunos alumnos, por resolverlo por el "método de siempre": planteando un S.E.L., resultó tan didáctico, que aunque es más largo, lo compensa con la cantidad de ideas que despliega. Por ello se sacó de contexto para usarlo como una excelente actividad introductoria en los cursos donde explicamos S.E.L.P., para que éstos comprendan la utilidad de los mismos. Veamos el trabajo que surgió en el aula: Los alumnos llamaron: x e y al número total de huevos de gallina y de pata, respectivamente. Luego: $x + y = 99 = 6 + 12 + 14 + 15 + 23 + 29$. Por otra parte, si la cesta que vende es la de $\{ \diamond \} = 6$ huevos de gallina o de pata, se obtienen respectivamente los S.E.L.:

$$\begin{cases} x + y = 99 \\ x - \{6\} = 2y \end{cases}; \begin{cases} x + y = 99 \\ x = 2(y - \{6\}) \end{cases}$$

Tras resolverlos, estudiaron si los valores obtenidos cumplen las condiciones del problema, lo cual significaba entre otras cosas que $x, y \in \mathbb{N}$, pues, denotan el número total de huevos. Como no funcionaban, repitieron el mismo proceso para el caso en que la cesta que se vende fuese la de 12, 14, 15, 23 ó 29, distinguiendo ambos casos: de gallina, o de pata. No fue necesario acabar de resolver los 12 S.E.L., para que observasen, ya aburridos, que todos los S.E.L. eran del tipo:

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x-\{0\} = 2y \end{array} \right\} ; \quad \left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x = 2(y-\{0\}) \end{array} \right\}$$

donde la cantidad que va en el icono es el número de huevos de la cesta que vende: 6, 12, 14, 15, 23 ó 29. Basta ayudar a que pongan en este lugar un *parámetro* a , y que resuelvan dichos S.E.L. olvidándose que ahora tienen una letra en el icono. Ello conduce a resolver tan sólo 2 S.E.L.P:

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x-a = 2y \end{array} \right\} ; \quad \left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x = 2(y-a) \end{array} \right\} ; \quad \text{donde } a \in \{6, 12, 14, 15, 23, 29\}$$

Ahora fácilmente, resolviendo los sistemas analizaron sus soluciones (ver tabla):

$$\left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x-a = 2y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{198+a}{3} \\ y = \frac{99-a}{3} \end{array} \right\} ; \quad \left. \begin{array}{l} x+y = 99 \\ x = 2(y-a) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{198-2a}{3} \\ y = \frac{99+2a}{3} \end{array} \right\}$$

a	x gallina	y gallina	x pata	y pata
6	68	31	62	37
12	70	29	58	41
14	70.6	28.3	56.66	42.3
15	71	28	56	43
23	73.66	25.33	50.66	48.3
29	75.66	23.33	46.66	52.3

obviamente como $x, y \in \mathbb{N}$, descartaron los valores decimales, por lo que la cesta que retiró el huevero no pudo ser ni la de 14, ni la de 23 ni la de 29. Del resto de candidatos a solución:

<u>gallina</u>			<u>pata</u>		
C.1	a=6	x=68 y=31	C.4	a=6	x=62 y=37
C.2	a=12	x=70 y=29	C.5	a=12	x=58 y=41
C.3	a=15	x=71 y=28	C.6	a=15	x=56 y=43

fueron fácilmente analizados. Por ejemplo, la primera candidata C.1 no es solución, pues si se vende la cesta de $a = 6$ huevos de gallina, quedarán $68-6=62$ huevos de gallina, que son el doble de los de pata que restan, 31, pero vendiendo esta cesta de 6 huevos, las otras cestas que quedan son: 12, 14, 15, 23, 29, a partir de las cuales es imposible obtener 31 huevos de pata, ya que, cada cesta contiene huevos de un solo tipo. Así, dedujeron que la cesta buscada es la de 12 huevos.

Por otra parte el estudio de los S.E.L.P. también tiene interés como modelo de trabajo para ayudar a salvar ciertas "dificultades clásicas" como puede ser la traducción al lenguaje algebraico. Ilustraremos esta idea mediante un problema extraído de un libro de texto de C.O.U.:

"La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas es igual a la suma de las decenas más el doble de la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 297 unidades. Calcular dicho número".

Si zyx es el número en notación posicional, el problema se resuelve a través del S.E.L.:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 7 \\ 2x + y - z & = & 0 \\ (100z + 10y - x) - (100x + 10y + z) & = & 297 \end{array} \right\}$$

sin embargo no hace falta plantear todas las ecuaciones, basta con plantear dos de ellas y parametrizar para llegar a la solución; luego no pasa nada si te quedas enganchado planteando una de las tres ecuaciones. En efecto, planteamos el S.E.L. de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 7 \\ z & = & y + 2x \end{array} \right\} \text{(grado de libertad : } 3 - 2 = 1)$$

Introducimos un parámetro $x = \lambda$, y el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{rcl} l + y + z & = & 7 \\ 2l + y - z & = & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = l, \quad y = \frac{7-3l}{2}, \quad z = \frac{7+l}{2}$$

Como: $X = \lambda \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ al ser la cifra de las unidades, consideramos los casos:

caso 1: $\left\{ y = \frac{7-3l}{2} \right\}_{l=0} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$, no puede ser, puede ser la cifra de las decenas sería decimal

caso 2: $\left. \begin{array}{rcl} x=1 \\ l=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 421 \\ z=4 \end{array} \right\}$ Se cumple la condición deseada: $4 + 2 + 1 = 7$
 $4 = 2 + 2 \times 1$
 $421 - 124 = 297$

caso 3: $\left\{ y = \frac{7-3l}{2} \right\}_{l \geq 2} \Rightarrow$ la cifra de las decenas sería decimal o negativa

Veamos un ejemplo más, también experimentado en el aula, en el cual la potencia de la técnica de la parametrización en los S.E.L. se manifiesta de un modo bello y contundente. Ilustramos este hecho a partir de un problema propuesto en la fase final de XIX Olimpiada Matemática Española (y que con otro enunciado, el matemático Charles Lutwidge Dodgson, más conocido por Lewis Carroll propuso en su famoso libro de 1865: "Alicia en el país de las maravillas"):

En una tienda un caramelo, tres globos y siete papeletas han costado 14 pesetas, mientras que un caramelo, cuatro globos y diez papeletas han costado 17 pesetas. Sabiendo que el precio de un caramelo es un número natural, calcular el precio total de: (a) un caramelo, un globo y una papeleta y (b) dos caramelos, tres globos y cinco papeletas.

No podemos (ni queremos) ocultar de ninguna manera la dificultad que el problema entraña para la mayoría de los alumnos (¿por qué sino está propuesto en la fase final de una competición estatal de Matemáticas?), pero tampoco podemos negar la capacidad de todos los alumnos a plantear el S.E.L.:

$$\left. \begin{array}{rcl} (A) & c + 3g + 7p & = 14 \\ (B) & c + 4g + 10p & = 17 \end{array} \right\}$$

siendo c , g y p , el precio de un caramelo, un globo y una papeleta respectivamente.

La resolución "olímpica" de este problema pasa por considerar los S.E.L. equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} 3(A) - 2(B) & \Rightarrow & c + g + p = 8 \\ 5(A) - 3(B) & \Rightarrow & 2c + 3g + 5p = 19 \end{array}$$

o plantear el S.E.L.:

$$\left. \begin{array}{rcl} c + 3g + 7p & = & 14 \\ c + 4g + 10p & = & 17 \\ c + g + p & = & x \\ 2c + 3g + 5p & = & y \end{array} \right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}; M^* = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 14 \\ 1 & 4 & 10 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 3 & 5 & y \end{bmatrix}$$

Observando que todos los menores de orden 3 de la matriz M son nulos y existe al menos un menor de orden 2 no nulo, se deduce que $\text{rango}(M) = 2$. Para que el último S.E.L. tenga solución, por Rouché-Frobenius, $\text{rango}(M^*) = 2$, o equivalentemente se debe imponer que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 17 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 8 = c + g + p, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 17 \\ 2 & 3 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 19 = 2c + 3g + 5p$$

Puede pensarse que estas soluciones están reservadas a unos pocos alumnos "olímpicos", sin embargo mostramos a continuación que los alumnos que usan la técnica de la parametrización (la cual claramente está al alcance de todos) llegan no sólo a la solución - lo cual constituye un gran paso -, sino que aportan una solución más rica, pues no sólo responden a las preguntas que plantea el problema calculando las sumas pedidas, sino lo que vale cada uno de los productos.

Así parametrizando respecto de la variable C cuyo rango pueden controlar al saber que varía entre los enteros positivos:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3g + 7p & = & 14 - l \\ 4g + 10p & = & 17 - l \end{array} \right\} \Rightarrow c = l, g = \frac{21 - 3l}{2}, p = \frac{l - 5}{2}$$

Ahora resuelven el problema distinguiendo de un modo natural los siguientes casos:

caso 1: $c = l \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow p = \frac{l - 5}{2}$, el precio de una papeleta sería nulo o negativo

caso 2: $c = l = 6, g = \frac{3}{2}, p = \frac{1}{2}$

caso 3: $c = l \in \{7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow g = \frac{21 - 3l}{2}$, el precio de un globo sería nulo o negativo

Aunque hemos dedicado estas líneas a un aspecto concreto del currículum de Matemáticas, nos gustaría que el trabajo realizado sirviese no sólo para este tema puntual, sino que nos estimule para extrapolar los planteamientos fundamentales del mismo a cualquier parte de las Matemáticas que trabajemos en el aula.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) CORTÉS LÓPEZ, J.C. (1998): "Reflexiones sobre sistemas de ecuaciones lineales parametrizados", *UNO*, nº 18, 113-122.
- (2) DE GUZMÁN, M. (1994): *Para pensar mejor*. Editorial Pirámide, Madrid.