

GRUPOS DE LEONARDO

Inmaculada Fernández Benito

I.E.S. María Moliner. Laguna de Duero (Valladolid).

El estudio de los movimientos en el plano forma parte del currículo del segundo ciclo de la E.S.O., sin embargo son pocas las Programaciones Anuales de los Departamentos de Matemáticas donde se recogen contenidos relacionados con este tema, y aún son menos los Institutos donde se imparte alguna unidad didáctica que trate estos aspectos. Las causas de este olvido pueden ser muchas y variadas, tal vez pensamos que esta parte de las Matemáticas es poco importante y ante la escasez de horas disponibles preferimos dar otros contenidos que consideramos básicos y más relacionados con otros temas. Sin embargo, el estudio de las **isometrías** y de los **grupos de simetría de una figura** son parte importante de la Geometría Plana y del Álgebra, además de ofrecer formas diferentes de “hacer Matemáticas”, también son una herramienta útil para tratar otros temas: la Trigonometría, la representación de funciones. Pero, sobre todo, si queremos presentar a nuestros alumnos el aspecto útil y práctico que tiene esta asignatura, tenemos en este tema un material incomparable para que vean la aplicación de las matemáticas al mundo que les rodea, sobre todo en los campos del diseño y la arquitectura.

Nadie puede poner en duda el bagaje matemático que exige el estudio en profundidad de las isometrías, por eso algunas de los enunciados que expongo a continuación no son aptos para alumnos pero si convenientes para profesores.

1. Isometrías

Una isometría del plano es una aplicación biyectiva $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2$, se cumple que $d(P, Q) = d[f(P), f(Q)]$. El conjunto de las isometrías del plano tiene estructura de grupo para la composición de aplicaciones.

Las isometrías son: las traslaciones, los giros, las simetrías y los deslizamientos, y todas ellas se pueden descomponer en producto (composición) de una, dos o tres simetrías.

2. Grupos de simetría

Una figura plana, es decir cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$, se puede estudiar “estáticamente”, es decir calcular sus ángulos, área, etc.... Pero también se puede estudiar “dinámicamente”, buscando los movimientos que la dejan invariante.

Sea P una figura plana. Consideremos el conjunto:

$GS(P) = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es una isometría y } f(P)=P\}$

Este conjunto es un grupo para la composición de isometrías y por tanto un subgrupo del grupo de las isometrías del plano. A $GS(P)$ se le denomina **Grupo de Simetría** de la figura P .

Conviene tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- ✓ $GS(P)$ contiene como mínimo a la identidad (Cuanto más “regular” es una figura más elementos contiene su grupo de simetría).
- ✓ Figuras distintas pueden tener el mismo grupo de simetría.
- ✓ En las figuras hay que distinguir los puntos fijos de los elementos dobles.
- ✓ Los grupos de simetría pueden ser finitos y podremos escribir la tabla del grupo, o pueden ser infinitos y dar un sistema generador del mismo.
- ✓ Hemos dicho que el grupo de simetría de una figura está formado por las isometrías que la dejan invariante, pero también podemos pensar que el grupo de simetría de la figura está formado por los movimientos que a partir de un motivo mínimo hacen posible la construcción de toda la figura.

3. Grupos puntuales de simetría o de Leonardo

Un grupo de simetría se llama grupo puntual si es finito y tiene un punto fijo $O \in P$ para todas las isometrías de $GS(P)$. Las únicas isometrías que dejan un punto fijo son las simetrías con el punto en el eje y los giros de centro ese punto.

Por tanto estos grupos de simetría podrán ser de dos tipos:

A) Si $GS(P)$ contiene un giro de centro O y ángulo α , por ser finito debe existir un número natural n tal que $n\alpha = 2\pi$ y por tanto tendremos que:

$GS(P) = \{G(O, k2\pi/n) \mid k = 1, 2, 3, \dots, n\} = \langle G(O, 2\pi/n) \rangle = C_n$. Grupo Cíclico de orden n engendrado por $G(O, 2\pi/n)$.

B) Si $GS(P)$ contiene una simetría S_r con $O \in r$. Tenemos $GS(P) = S_r$, $I = S_r$ o S_r .

Si $GS(P)$ contiene dos simetrías S_r y S_t con $O \in r$ y t , debe contener al giro que resulta al componer las dos simetrías, entonces según lo visto en A) obtenemos que $G(O, k2\pi/n) \in GS(P)$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Al componer la simetría S_r con estos giros se van obteniendo, también, otras simetrías de ejes r_k tales que $G(O, k2\pi/n)(r) = r_k$.

Por lo que $GS(P) = \{G(O, k2\pi/n) \text{ y } S_{rk} \text{ con } k = 1, 2, 3...n\} = \langle G(O, 2\pi/n), S_r \rangle = \langle S_r, S_l \rangle = D_n$.

Grupo diedral de orden n .

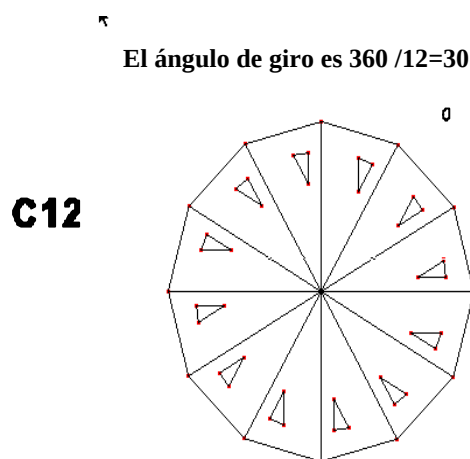
Como consecuencia de la demostración anterior (sólo esbozada), se puede enunciar el siguiente teorema llamado

Teorema de Leonardo:

Los únicos grupos puntuales de simetría son los grupos cíclicos y los grupos diedrales C_n y D_n respectivamente. Conviene notar que si bien hay infinitos de estos grupos, cada uno de ellos está formado por un número finito de movimientos. Además para $n \geq 3$ los D_n son los grupos de simetría de los n -ágonos regulares.

4. Actividades para alumnos

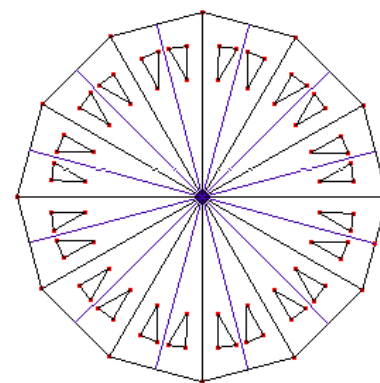
- 1) Construir simetrías y giros por medio de figuras recortadas y pegadas. Deduciendo el resultado de componer estos movimientos, sobre todo en el caso de la composición de dos simetrías de ejes que se cortan.
- 2) Buscar los movimientos del grupo de simetría de una figura, viendo las diferentes formas en que una figura recortada se puede volver a colocar en el sitio. Observando que hay grupos finitos e infinitos y su relación con la regularidad de la figura.
- 3) Estudiar las simetrías que tienen diferentes figuras. Y recíprocamente a partir de una parte de la figura y de los



El ángulo de giro es $360/12=30$

Hay $12+12 = 24$ ejes de simetría

D12



ejes de simetría de la misma reconstruirla de nuevo.

- 4) Clasificar distintas figuras (logotipos, marcas, emblemas de familias japonesas, llantas de coches...) según su grupo puntual de simetría.
- 5) Con un mismo motivo construir varios grupos de Leonardo. Esta actividad se puede hacer dibujando en papel o con el ordenador y el programa CABRI.
- 6) Las llantas de las ruedas ofrecen una amplia muestra de diseños donde aparecen grupos de Leonardo.

BIBLIOGRAFÍA

- ALSINA, C., Y TRILLAS, E. (1985). Lecciones de álgebra y geometría. Barcelona: Gustavo Gili.
- ALSINA, C., PÉREZ, R., RUIZ, C. (1989). Simetría Dinámica. Madrid: Editorial Síntesis.
- BLANCO, M. F. (1994). Movimientos y simetrías. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- JAIME, A., GUTIÉRREZ, Á. (1996). El grupo de las Isometrías del plano. Madrid: Síntesis.
- MARTIN, G.E. (1994). Transformation Geometry. U.S.A.: Springer-Verlag.
- MONTÚ A. (Ed.) (1999). El triángulo. El cuadrado. El pentágono. México. G. Gili.
- MORA, J.A. Y RODRIGO, J. (1993). Mosaicos I y II. Granada: Proyecto Sur, Col. 2 puntos.
- WEYL, H. (1990). Simetría. Madrid: Mc Graw-Hill.