

TRATAMIENTO GRÁFICO DE LA FUNCIÓN DERIVADA

Francisco Puerta García

Instituto "Isabel de España". Las Palmas de Gran Canaria

La derivada no es un concepto fácil. Desde los primeros intentos de matematizar el mundo, allá por tiempos de los babilonios, la humanidad tardó milenios en desarrollarla. Fue necesario el genio de Newton, Leibniz y otros para dar a luz esta nueva herramienta que cambió el rumbo de las matemáticas y, por tanto, de la ciencia y de la tecnología. Muchos han coincidido en considerar al cálculo diferencial como una de las grandes conquistas intelectuales del género humano. No es, pues, extraño que la derivada ofrezca serias dificultades conceptuales a los estudiantes cuando por primera vez se enfrentan a ella.

En mis clases de bachillerato me encuentro con varios problemas a la hora de enseñarla

- No suele estar suficientemente adquirido el concepto de pendiente de una recta: los alumnos la ven como un número, identificado con el coeficiente de x en la ecuación de la recta, pero no suelen interpretarla como un coeficiente de proporcionalidad o como una tasa de crecimiento.
- El concepto de recta tangente a una función tampoco es fácil. La analogía con la recta tangente a la circunferencia tiene muchísima fuerza e introduce concepciones erróneas. Por ejemplo, parece que la recta tangente debe cortar a la gráfica exclusivamente en el punto de tangencia.
- El concepto de pendiente de una curva en un punto no está interiorizado, ni conectado con la experiencia de los alumnos. Tampoco tienen claro que la recta es la única función que tiene la misma pendiente en todos sus puntos.
- En general, todo proceso de paso al límite ofrece gran dificultad conceptual; en el caso de la derivada, además, el profesorado suele darle una formulación dinámica muy difícil de ver en imágenes estáticas: rectas secantes que se *aproximan* a la recta tangente en un punto dado, cuando el otro punto de corte se *aproxima* al punto de tangencia.
- Por último, la derivada de una función en un punto se puede calcular de dos maneras distintas: mediante un límite o mediante la particularización de la función derivada a dicho punto. No siempre los alumnos entienden que son dos aspectos de lo mismo.

El objetivo de esta ponencia es mostrar cómo la calculadora gráfica, dotada de un panel de retroproyección, puede convertirse en un valiosísimo recurso para que el profesor de matemáticas pueda abordar estos problemas y lograr en sus alumnos una mayor y mejor comprensión conceptual de la derivada, más allá del simple cálculo formal. Tradicionalmente se enseña primero el concepto de derivada en un punto y luego se generaliza para dar lugar a la función derivada. Aquí, yo propongo invertir ese orden: gracias a los medios tecnológicos se puede llegar, de entrada, al manejo de la función derivada, luego abordar el cálculo aproximado de pendientes en un punto, y terminar simbolizando y definiendo como límite la derivada de una función en un punto.

Preparación

Cuando comienzo a trabajar la derivada con mis alumnos, procuro asegurarme de que determinados conceptos fundamentales están suficientemente consolidados. Para reforzar aquellos relacionados con la pendiente de una recta, uso el módulo de geometría dinámica contenido en la calculadora TI-92 (basado en Cabri II). Con ella represento una recta y su ecuación sobre los ejes coordenados, y un triángulo rectángulo móvil ACB construido sobre la recta, que materializa su pendiente (fig. 1). La máquina es capaz de mostrar *interactivamente* la ecuación de la recta y la medida de cualquier segmento o ángulo que deseemos. Al desplazar un elemento, *tirando* de él con el puntero, todas las medidas y los restantes elementos que dependen de él se actualizan dinámicamente. Moviendo los puntos A y B sobre la recta, el profesor puede mostrar muy fácilmente que siempre producen el mismo cociente $\frac{v}{h}$ (calculado por la máquina en la parte baja de la pantalla), independientemente de dónde los sitúe sobre ella, y que el valor de esta razón coincide siempre con el coeficiente de x que se ve en la ecuación. Una imagen estática no puede producir sobre los

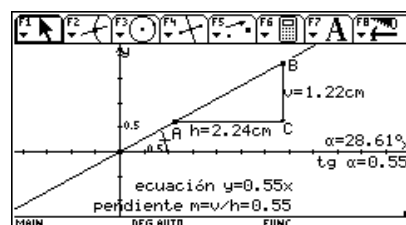


Figura 1

alumnos el mismo efecto que ver moverse los objetos y, simultáneamente, ver como cambian los valores numéricos correspondientes. Naturalmente, se puede presentar en la pantalla cualquier otra cantidad que nos interese contrastar, como, por ejemplo, la tangente trigonométrica del ángulo α . En cualquier caso, mi meta en esta etapa es que mis alumnos aprendan a *leer* la pendiente en el triángulo ACB como "la razón de lo que *sube* (o *baja*) a lo que *avanza* hacia la derecha", pues será fundamental para adquirir el concepto intuitivo de pendiente de una curva en un punto.

Recta tangente y pendiente de una curva

El siguiente paso ha de ser la adquisición de los conceptos intuitivos de recta tangente a una curva en un punto y pendiente en un punto de una curva. La geometría dinámica nos permite generar bellas y sugerentes gráficas (fig. 2), pero yo opino que, de la pendiente, además, hay que tener una experiencia más *cinestésica*, si se me permite el término. Quiero decir que como sólo se entiende bien lo que construye, traza o calcula uno mismo, hay que dedicarse a *tantear* con una regla sobre la curva hasta que se aprende a situar, aproximadamente, la recta tangente en cualquier punto. Trazar la recta tangente es un sencillo ejercicio de coordinación visual y muscular cuya realización efectiva creo que facilita muchísimo la adquisición del concepto de pendiente de una curva en un punto.

A mis alumnos les entrego la gráfica de la figura 3, y les digo:

—"Supongamos que se tratara de una montaña rusa, donde los vagones circulan de izquierda a derecha. ¿Podrían ustedes identificar puntos de la curva donde los vagones estén, aproximadamente, en posición horizontal?"

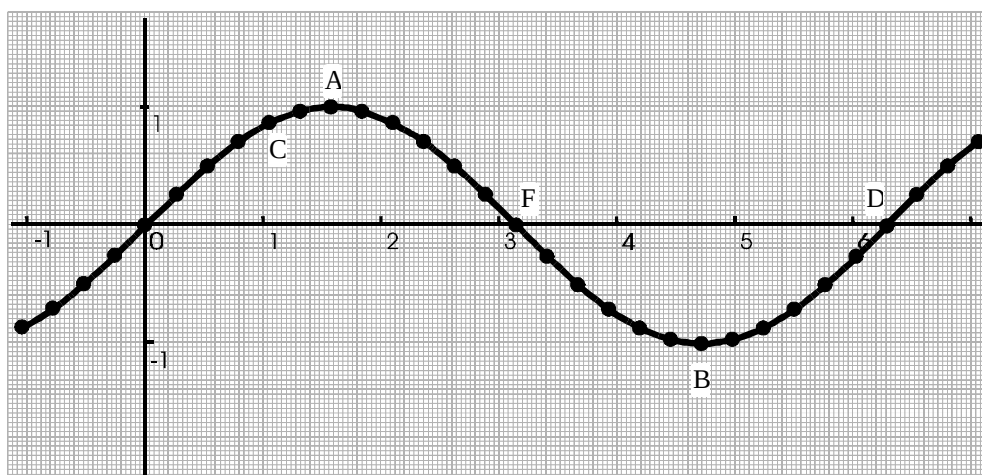


Figura 3

Ellos indican sin dificultad las coordenadas de los puntos A y B.

—"Ahora, tanteando con la regla, simulen la posición del vagón en los puntos C, D y F".

—[...]

—"Así, pues, ven que en cada punto de la curva el vagón tiene diferente pen-

diente. Vamos a tratar de estimarla valiéndonos de la regla, el semicírculo graduado y la calculadora".

Con el retroproyector les muestro cómo usar la regla para trazar la recta tangente en el punto deseado, cómo medir su inclinación con el semicírculo graduado y, finalmente, cómo hallar la pendiente con la calculadora aplicando la función tangente al ángulo medido¹.

Como se ve en la figura 4, la calculadora es capaz de trazar la recta tangente y calcular su ecuación en el punto que se desee, confirmando las estimaciones hechas por los alumnos. Por otra parte, la herramienta Zoom de la calculadora gráfica sirve para justificar esta manera de obtener las pendientes, pues la idea intuitiva de derivabilidad puede expresarse diciendo que "Toda función derivable en un punto es *localmente* una recta". Vemos en la figura 5, que si *profundizamos* suficientemente con el zoom en un punto, la curva aparece como una recta, y la pendiente que muestra en la pantalla (si la ventana de visualización tiene la misma escala en ambos ejes) es, ni más ni menos, que la derivada en el punto sobre el que hemos efectuado el zoom. También el zoom ayuda a ver que algunas funciones tie-

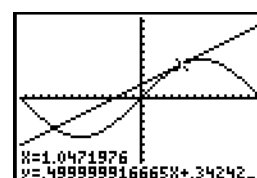


Figura 4

¹ Si las pendientes no son mucho mayores que 2 (en valor absoluto), se puede alcanzar un grado de precisión bastante alto.

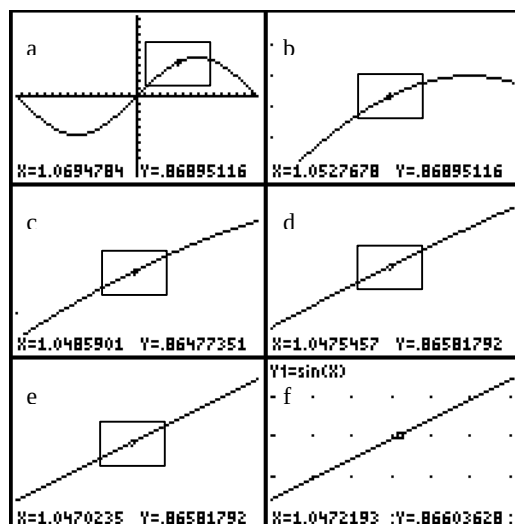


Figura 5

Si se quejan del excesivo número de puntos, les indico que aplicando sencillas consideraciones de simetría podrán completar la tarea tratando sólo unos pocos casos.

En la figura 7 vemos el trazado aproximado de la función derivada de $y = \sin x$. El efecto sobre los alumnos

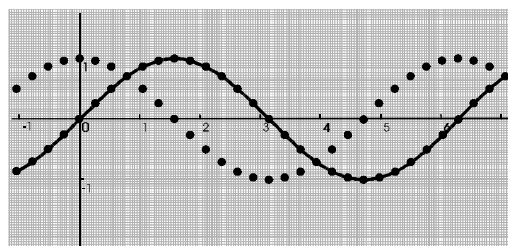


Figura 7

Tabla de funciones derivadas

Ahora, con la ayuda de la calculadora gráfica retroproyectable, la clase, en diálogo con el profesor, va a ir *descubriendo* una serie de funciones derivadas y formando con ellas una pequeña tabla: su primera tabla de derivadas.

En la figura 8 se ve la familia de funciones $y = kx$, $k \in \{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$, con sus correspondientes funciones derivadas empezando a aparecer de izquierda a derecha. Para los alumnos es inmediato conjeturar, después de ver estas gráficas, que la función derivada de $y = kx$ es $y =$

Lo mismo ocurre con la derivada de $y = x^2$. Todos reconocen al presentarles la figura 9a que su función derivada ha de ser $y = 2x$. Con $y = x^3$ tienden a decir que va a salir $y = 3x$, y cuando ven la figura 9b a veces se precipitan diciendo que es $y = x^2$. Superponiendo la gráfica de ésta última (fig. 9c), llegan enseguida a la conclusión –por tanteo– de que la derivada debe de ser $y = 3x^2$. En este punto, mu-

chos intuyen ya la regla para el caso general $y = x^n$, que una vez confirmada, pasa a formar parte de la tabla de derivadas que estamos construyendo. Existen funciones elementales como $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \ln x$, etc., cuyas funciones derivadas son fácilmente reconocibles por los alumnos, y por lo tanto, pueden añadirse a la tabla por este procedimiento visual. Lo mismo ocurre con la propiedad $D(kf(x)) = kD(f(x))$ y, en algunos casos sencillos, con $D(f(x) \pm g(x)) = D(f(x)) \pm D(g(x))$.

nen puntos en los que, por mucho que profundicemos, la función no se convertirá en recta (fig. 6). Es decir, que existen funciones no derivables.

Trazado punto a punto de la función derivada

Una vez que mis alumnos han aprendido a estimar pendientes les pido: "Hallen la pendiente de la función en los puntos señalados en la gráfica, y, para cada uno de ellos, representen otro punto con su misma abscisa, y cuya ordenada sea el valor de la pendiente en el punto

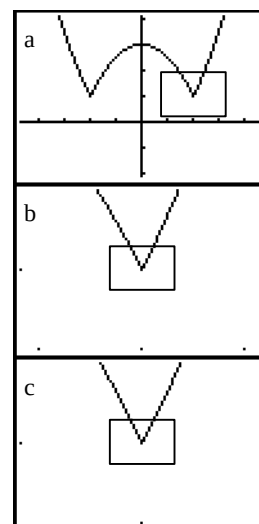


Figura 6

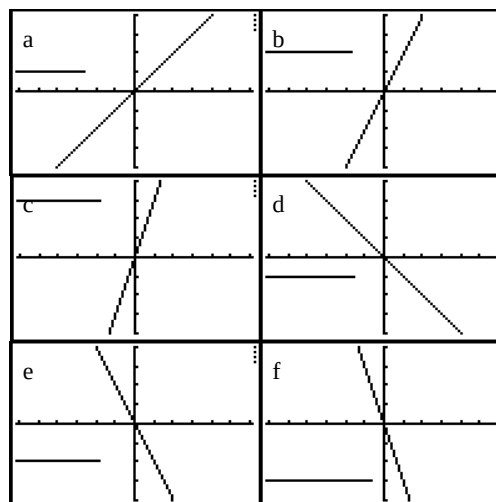


Figura 8

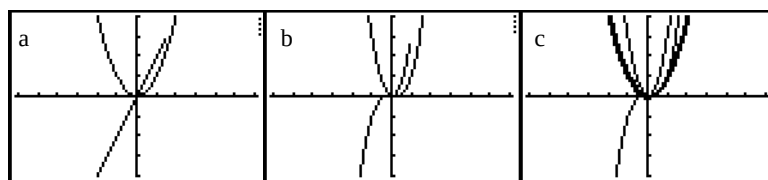


Figura 9

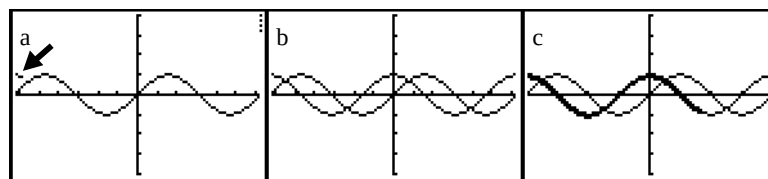


Figura 10

mínima. Así confirman su intuición de la derivada y se acostumbran a visualizarla sin calcular. Hechas las conjeturas, permito que la máquina termine de representar y_2 (fig. 10b) y, como confirmación, superpongo la verdadera función derivada (fig. 10c).

La derivada en un punto

La siguiente etapa es plantear a los alumnos la necesidad de encontrar algún método numérico para calcular las pendientes, dado que el método gráfico siempre será impreciso; también les digo que si pudiéramos conocer de antemano la función derivada de una función dada, podríamos utilizarla para estudiar las pendientes de ésta, sin más que obtener valores de aquella.

Fijémonos de nuevo en nuestro vagón de montaña rusa. Una primera aproximación a la pendiente de la curva en el punto P podría ser la pendiente de la recta que pasa por A y B, puntos de contacto de las ruedas con la vía (fig. 11a). No es difícil que a partir de esta imagen los alumnos esbocen un diagrama como el de la figura 11b y

utilicen (numéricamente, al menos) el cociente $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ como aproximación al valor de la pendiente. Como se ve en la figura 12a, podemos introducir en la calculadora esta expresión en la forma $y_2 = \frac{y_1(x+h) - y_1(x-h)}{2h}$, dando a h un

valor fijo suficientemente pequeño (fig. 12b). Al representarla observamos que, efectivamente, genera una curva indistinguible de la función derivada de $y_1(x)$ (fig. 12c). Utilizando el zoom, vemos (fig. 13) que hay una pequeña diferencia entre y_2 y la auténtica función derivada de y_1 almacenada en y_3 . Razonando que la causa debe ser la imprecisión introducida al tomar h igual a 0'1, lo confirmamos dibujando de nuevo las funciones con un h más pequeño². En términos de nuestra metáfora del vagón, podemos decir que las pendientes estarán mejor calculadas si los puntos donde las ruedas tocan a la vía están lo más cerca posible del punto P.

En este momento ya podemos utilizar la notación clásica de límite y decir que $y_1'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_1(x+h) - y_1(x-h)}{2h}$, dejando bien claro el significado intuitivo de esta expresión: "Si la función tuviera un comportamiento uniforme en un intervalo centrado en el punto P, su pendiente vendría dada por la razón entre el cateto BC y el cateto AC del triángulo ABC (fig. 11b). Como el caso ideal es que dichos catetos sean lo más pequeños posible, lo expresamos con un límite".

Derivadas laterales

Si intentáramos aplicar `nderiv()` a una función con puntos de no derivabilidad como, por ejemplo, $y = |\sin x|$ observaríamos (fig. 14) que está definida en ellos, lo que, desde luego, es un error. Por ejemplo, para $x = p$ vemos en dicha figura que la derivada estimada vale cero. Al invitar a los alumnos a modificar el método para calcular la derivada, de modo que sea posible aplicarlo a los casos donde existan dos rectas tangentes, una por la izquierda y otra por la derecha (fig. 15), es casi seguro que algunos de ellos propondrán tomar

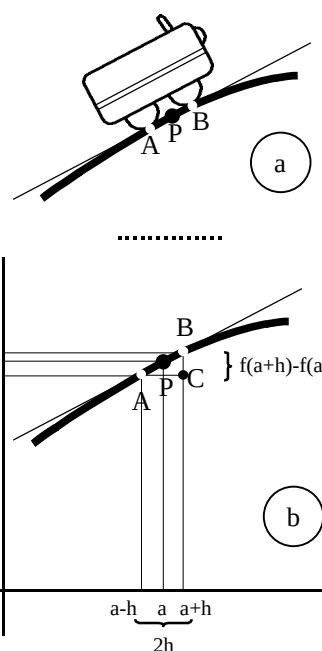


Figura 11

² De hecho, si consultamos el manual de la calculadora, comprobaremos que ésta emplea el mismo método con $h=0'001$. Este valor predefinido se puede cambiar usando la sintaxis `nderiv(función,variable,punto,h)`.

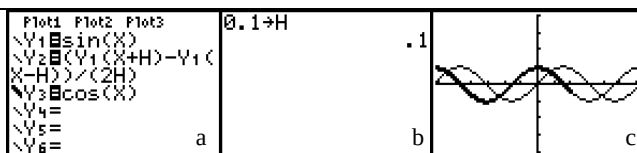


Figura 12

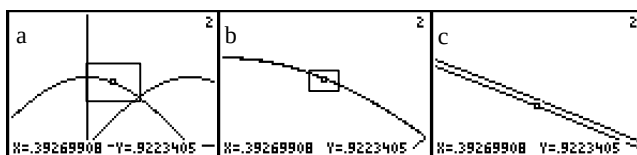


Figura 13

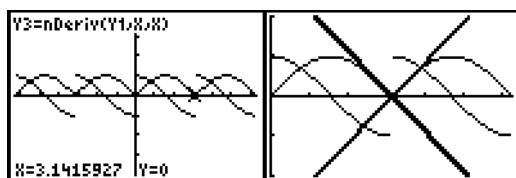


Figura 14

Figura 15

rectas secantes en los puntos A y P o en P y B, respectivamente, como aproximaciones a las rectas tangentes en P.

Llegar desde aquí a las definiciones clásicas de derivada por la izquierda, derivada por la derecha y derivada en un punto x es sólo cuestión de expresar con simbolismo matemático las ideas que ya se han hecho patentes en la clase. Y una vez embarcados en el terreno simbólico completamos el estudio de la función derivada deduciendo, mediante límites, algunas de las funciones derivadas que los alumnos tan fácilmente intuyeron a partir de sus gráficas.

Para finalizar

La exposición que acabo de hacer es sólo un esbozo³ –y un punto de partida– de una rica serie de actividades que podemos desarrollar alrededor del concepto y la interpretación de la derivada. Hasta ahora lo habitual en las clases de matemáticas era dotar a nuestros alumnos de un gran dominio del cálculo formal, que, en efecto, les servía para resolver una serie de ejercicios típicos, pero no les aportaba mucha comprensión de las propiedades de las funciones y su relación con la derivada. Creo haber mostrado que la introducción de la tecnología gráfica en las clases de matemáticas es el factor que, en los próximos años, más va a influir en facilitar, a la mayoría de los alumnos de bachillerato, la transición al pensamiento matemático avanzado.

³ Por razones de espacio no he incluido aquí, entre otras importantes cuestiones, el trabajo con tablas que completa la visión numérica de la derivada como límite de las pendientes de las rectas secantes.