

**IX JAEM. MESA 1. TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.
1B INTERNET Y MULTIMEDIA**

Ponencia: "VER" LAS MATEMÁTICAS

Antonio Pérez Sanz.

IES Salvador Dalí. Madrid

SMPM

aperez4@platea.pntic.mec.es

<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/>

*"No hay peor ciego que el que nos impide ver"
Refrán adaptado*

1. INTRODUCCIÓN

"Evidente"... Uno de los términos más socorridos y más utilizados por casi todos los profesores de Matemáticas, más frecuente según vamos subiendo de nivel educativo.

"Evidente"... Una de las palabras más temidas por los estudiantes de Matemáticas, sobre todo cuando no consiguen "ver" eso que según el profesor parece tan claro, algo que parece ser que "entra por los ojos". Temida, por que si uno "no le ve" está realmente ante una situación problemática. Si manifiesta al profesor su "ceguera" ante algo que se supone obvio, puede quedar ante él y ante sus compañeros como un zote matemático, si pregunta a algún compañero se puede encontrar con una mirada de desprecio y hasta adivinar algún pensamiento del estilo..."pues lo lleva claro éste..."

Por otra parte, si se queda en la "oscuridad" y resulta que esa "evidencia" es imprescindible para enterarse de lo que sigue en el discurso matemático su silencio le puede costar caro. ¡Un auténtico problema!. Además del riesgo de que le cuelguen el sambenito de "no ver lo evidente"

Pero, ¿realmente la enseñanza de las Matemáticas, al menos en sus niveles de primaria y secundaria, persigue en verdad hacer evidentes para todos los alumnos los conceptos y relaciones matemáticos? Evidentes en su sentido etimológico, lo que entra por los ojos.

Dicho de una manera más gráfica: ¿nos esforzamos los profesores lo suficiente para hacer "visibles" las Matemáticas que enseñamos?, ¿"ven", con los ojos, los alumnos esos contenidos matemáticos?

La historia de las Matemáticas se parecen de alguna manera a la saga de "La Guerra de las Galaxias", la lucha continua entre las fuerzas de la Luz contra las de la Oscuridad.

En ambos bandos encontramos combatientes de gran peso.

En el bando de la LUZ, de los partidarios de "**ver las Matemáticas**", alguien tan poco sospechoso de folklórico como Gauss decía que "*la Matemática es la ciencia del ojo*".

Si nos remontamos a los orígenes de esta ciencia, no está de más repasar el significado de la palabra **Teorema** (θεωρημα), "*lo que se contempla*", y aquí el verbo contemplar no se usa en sentido metafórico.

Otro clásico como Descartes decía, refiriéndose a las figuras matemáticas,

*"Es útil en muchas ocasiones describir estas figuras **y mostrarlas a los sentidos externos** para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente"*

Sin necesidad de remontarnos tanto en el tiempo, a finales de nuestro siglo, un siglo en el que la mayoría de las batallas didácticas las han ganado "las fuerzas de la oscuridad", Miguel de Guzmán reivindicaba con entusiasmo, pero también con prudencia, "el rincón de la pizarra¹". Un pequeño rincón en el que hacer visibles los conceptos y relaciones matemáticas. No toda la pizarra, no, sólo un pequeño rincón de la misma.

*"Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de **contenidos visuales, representables intuitivamente**, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas de campo"*

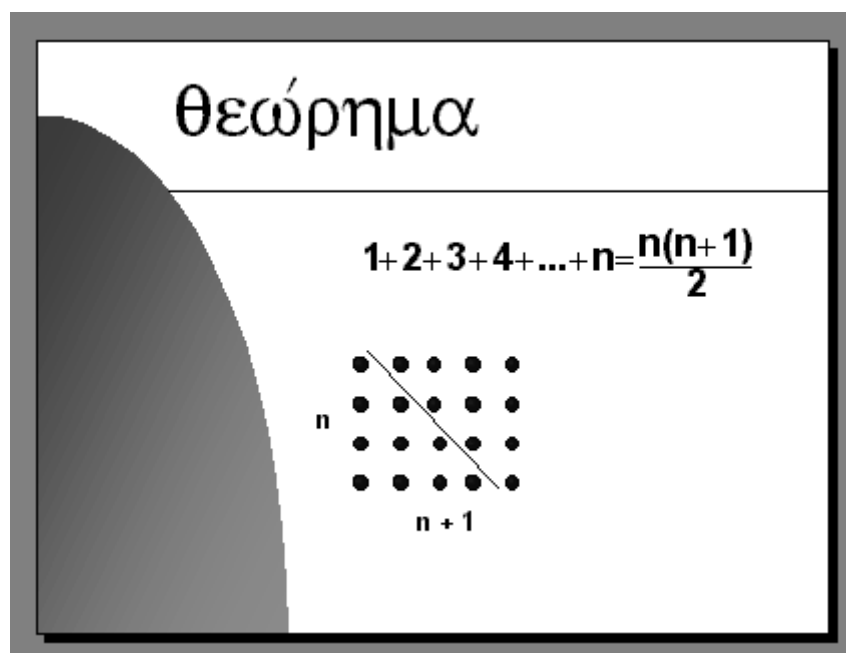
En ese mismo libro, como Prometeo desvelando el secreto de los dioses, nos dice

*"Los expertos poseen **imágenes visuales**, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo"*

*"Las ideas básicas del análisis elemental, orden, distancia, operaciones con números, nacen de **situaciones bien concretas y visuales**"*

Hasta las operaciones y relaciones con números, nacen de situaciones visuales. Y sobre todo podemos y debemos enseñarlas de forma visual.

Pitágoras y los pitagóricos eran unos grandes maestros en el arte de hacer visibles las matemáticas.



Este ejemplo visual de la fórmula,

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

directamente relacionada con los números triangulares es buena muestra de ello.

Pero, también en esta siglo, sobre todo en él, las fuerzas de la oscuridad se han manifestado.

Dieudonné, hablando de su libro "Algebra Lineal y Geometría Elemental", comenta curiosamente:

*"Me he permitido también **no introducir ninguna figura en el texto...**"*

*"Es deseable **liberar al alumno** cuanto antes de **la camisa de fuerza de las "figuras" tradicionales** hablando lo menos posible de ellas..."*

Esto en un libro en cuyo título aparecen las palabras Geometría Elemental. Como se observa no es un problema de falta de recursos tecnológicos para "evidenciar" las matemáticas, es una voluntad expresa de huir de la visualización. Y el problema es que Dieudonné dejó su impronta en la forma de enseñar matemáticas durante varias generaciones. Todos nosotros la hemos padecido.

2. EPISTEMOLOGÍA Y PEDAGOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS.

Nadie pone en duda que las Matemáticas son en la actualidad la materia científica con mayor nivel de abstracción. Pero este hecho que sin duda es irrefutable a nivel epistemológico no debería serlo desde un punto de vista de la pedagogía de las Matemáticas.

Quizás uno de los graves problemas de la didáctica de las Matemáticas en primaria y secundaria en las últimas décadas es pretender introducir conceptos y procedimientos matemáticos partiendo de un nivel de abstracción excesivamente alto para el desarrollo intelectual y cognitivo de los alumnos. La ausencia en las aulas de materiales manipulables, de imágenes fijas de objetos reales y de vídeos es una prueba de ello.

Nuestros alumnos, y nosotros mismos, vivimos inmersos en un mundo dominado por los mensajes visuales. Cualquier individuo de un país desarrollado, desde los primeros años de su existencia, está sometido a un continuo bombardeo de mensajes audiovisuales, fundamentalmente a través de los medios de comunicación de masas, pero también mediante vallas publicitarias, carteles, señales... que con el tiempo conforman una determinada manera de **ver** la realidad. Algunos expertos en Teoría de la Comunicación, como Joan Ferrés², retratan esta situación, de forma muy gráfica, afirmando que el hombre de finales del siglo XX vive inmerso en una *burbuja icónica*.

Sin embargo, nosotros en nuestras clases de Matemáticas pretendemos olvidarnos de esa realidad o, en el mejor de los casos, no la utilizamos con fines didácticos.

Los niveles de iconicidad son inversamente proporcionales a los de abstracción. Mientras más abstracto es un concepto más difícil resulta expresarlo mediante imágenes.

Como podemos observar en esta escala de iconicidad de Moles, en nuestras clases rara vez nos aventuramos a trabajar con niveles de iconicidad superiores al 4-5. O lo que es lo mismo nuestro discurso didáctico permanece siempre en los niveles más altos de abstracción. Y esto incluso con alumnos de primaria.

Icon	Definición	Ejemplo	Abst.
12	El objeto en sí mismo	La vitrina de una tienda	0
11	Modelo tridimensional a escala	Escaparates ficticios o virtuales	1
10	Esquema bi o trimensional	Globo terrestre, Mapa geológico	2
9	Fotografía	Cartel	3
8	Perfiles en diseño	Catálogos, prospectos	4
7	Esquema de construcción	Mapa, corte de un motor	5
6	Vista "estallada"	Esquema de piezas por proximidad topológica	6
5	Esquema eléctrico. Paso de la topografía a la topología	Plano del Metro	7
4	Organigrama o esquema bloque	Flow chart de un programa.	8
3	Esquema de formulación	Sociogramas, fórmulas químicas desarrolladas	9
2	Esquema en espacios complejos	Esquema de fuerzas sobre una estructura metálica	10
1	Esquema en un espacio abstracto	Gráficos vectoriales , triángulo de las vocales	11
0	Fórmulas algebraicas	Ecuaciones y fórmulas matemáticas. Textos	12

ESCALA DE ICONICIDAD-ABSTRACCIÓN (A. Moles)

¿Es por culpa de la ausencia de recursos tecnológicos? Definitivamente no.

En la actualidad los medios informáticos, un 30% de los hogares españoles cuentan con un ordenador personal, y sobre todo los medios audiovisuales, un 80% de hogares tiene un vídeo, hacen posible una aproximación a las Matemáticas menos abstracta, más icónica.

En definitiva, hoy es mucho más fácil hacer "ver las Matemáticas" a nuestros alumnos de primaria y secundaria.

2. LOS MEDIOS AUDIOVISUALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Hace más de 40 años, Nicolet, con unos recursos tecnológicos que hoy nos causan estupor, por lo precario y laborioso, ya descubrió el potencial y el sentido de la utilización de medios visuales, de imágenes en movimiento, como recursos didácticos.

Decía en la 11ª Reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas, que se celebró en Madrid en 1957, por iniciativa de Puig-Adam con el sugerente título de "El material para la enseñanza de las matemáticas":

*..."el film matemático para niños ha de tener por exclusiva misión el alumbramiento del feliz momento en que **la intuición descubre una verdad matemática**, a lo que contribuye eficazmente la sintaxis expresiva del movimiento y de la secuencia"*

En ese congreso, Nicolet presentó dos películas realizadas en 8 mm con animaciones artesanales dibujadas en acetatos, que según Puig Adam dejó impresionados a los asistentes:

*"La proyección de estos films dejó en el ánimo de todos la impresión de estar en los comienzos de **una técnica docente de valor insospechado**, llena de problemas y de dificultades, pero cuyos alcances para el bien de la enseñanza estamos aún lejos de prever"*

Un poco de luz en la oscuridad, más o menos en la misma época en que Dieudonné alardeaba de su desprecio a las imágenes.

Gracias a la profesora Emma Castelnuovo, presente en estas JAEM, que también asistió a esa Reunión de 1957, y que me facilitó una copia de esas películas³, podemos comprobar ahora ese valor insospechado de la imagen en movimiento como técnica docente.

Como no se trata de formular conjeturas, si no de hacer demostraciones del potencial de la imagen animada, "veamos" una demostración práctica.

IDENTIFICAR LUGARES GEOMÉTRICOS

Ejercicio práctico.

Intentar descubrir de forma abstracta, sin verlos físicamente, los siguientes lugares geométricos.

Sin "ver". Abstracción 12.

1. *¿Cuál es lugar geométrico de los puntos del plano que describen los centros de las circunferencias tangentes interiores a una circunferencia dada y que pasan por un punto fijo interior de la misma?*
2. *¿Cuál es lugar geométrico de los puntos del plano que describen los centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada y que pasan por un punto exterior de la misma?*
3. *¿Cuál es lugar geométrico de los puntos del plano que describen los centros de las circunferencias tangentes a una recta dada y que pasan por un punto dado?*

Tiempo para pensar...

Planteado de esta forma, el problema geométrico es de un nivel de dificultad alto, sobre todo para alumnos de secundaria. Para profesores menos, ya que al fin y al cabo estamos acostumbrados a fuentes de información poco icónicas, es decir, a procesar mensajes con un alto nivel de abstracción.

Veamos una presentación y una resolución del problema suministrada por Nicolet en uno de sus famosos filmes de 1957, utilizando una técnica de animación artesanal y laboriosa en su época, pero bastante más accesible en la actualidad.

Proyección del film: Generando cónicas.

Por desgracia, este soporte de comunicación, el papel impreso, nos priva de la posibilidad de disfrutar de la demostración visual. (Un soporte multimedia integrando imagen animada nos lo haría posible).

Desde 1957 las tecnologías de la imagen han evolucionado de manera increíble. De hecho este tipo de problemas, y casi toda la geometría descriptiva, pueden ser presentados y resueltos de forma intuitiva utilizando la infografía. La combinación de los recursos

informáticos de carácter gráfico y los audiovisuales hacen hoy posible una aproximación a casi toda la geometría elemental de forma visual.

4. LA REFORMA: NUEVOS MÉTODOS, NUEVOS RECURSOS

La LOGSE ha venido a introducir unos sustanciales cambios no solo en los contenidos curriculares sino también, y sobre todo, en los aspectos metodológicos.

Es muy difícil, por no decir imposible, no encontrar en las declaraciones de intenciones y en las orientaciones de carácter metodológico de casi cualquier currículo de enseñanza secundaria algún párrafo en el que se hacen reflexiones acerca del papel de las Nuevas Tecnologías en el mundo de la educación.

Si nos centramos en los currículos de Matemáticas en la ESO podemos encontrar frases tan elocuentes como esta

"El hecho de utilizar imágenes concretas hace que las producciones audiovisuales sean una base firme donde apoyar algunos procedimientos empíricos-inductivos encaminados a la construcción del conocimiento matemático"⁴

Esta cita está recogida de documentos oficiales del MEC, pero en cualquier publicación curricular de cualquier Comunidad Autónoma podemos encontrar muchas otras de contenido equivalente.

Es decir, al menos sobre el papel, se reconoce la incidencia que las Nuevas Tecnologías pueden y deben tener en el ámbito de la Educación y no sólo de la educación presencial⁵.

Pero del dicho al hecho hay mucho trecho, y lo que parece claro y "evidente" en las declaraciones sobre papel impreso no se convierte de la noche a la mañana en una práctica docente habitual.

Para intentar acortar ese trecho vamos a mostrar dos ejemplos, uno de carácter curricular y otro no tanto, en que los medios audiovisuales, en esta caso el vídeo, se convierten en recursos fundamentales para aproximar a los alumnos a los conceptos matemáticos.

Primer ejemplo: Movimientos en el plano. Geometría dinámica.

(Contenido curricular de la ESO en todas las Comunidades Autónomas)

En el plan de estudios de 1957 los movimientos en el plano se abordaban en PREU de una forma exclusivamente analítica; ecuaciones de giros, homotecias, traslaciones... En el del 70, sencillamente desaparecen de la escena académica.

Si algo debe reconciliar al profesor de Matemáticas con la Sociedad es el hecho de abordar, en los niveles obligatorios al menos, unas matemáticas útiles al conjunto de los ciudadanos y próximas a sus intereses; y, por qué no, agradables desde un punto de vista estético. Y de paso acercar las matemáticas presentes en la realidad cotidiana al aula.

Y si algún tema del currículo se presta especialmente a estos fines ese es la Geometría Dinámica. ¿Se pueden abordar estos contenidos a base de tiza y pizarra? Pues claro que sí, pero desde luego no es la mejor estrategia didáctica.



La Geometría se hace Arte.

Si en algún contenido matemático la utilización dinámica de la imagen tiene una justificación fuera de toda duda o suspicacia en éste. El poder de descripción de la imagen animada de los conceptos geométricos está a años luz del poder de convicción del profesor más elocuente, que por cierto habitualmente dibuja mal.

El marco ideal para explicar movimientos en el plano es sin duda la Alhambra de Granada, pero no todos tenemos la posibilidad de desplazarnos con nuestros

alumnos allí. Tampoco es factible visitar justo cuando lo necesitamos una exposición de Escher.

El vídeo en este caso es el recurso ideal para traer la Alhambra a clase, o para navegar en los universos imposibles de Escher, es decir, para acercar la realidad al aula.

Veamos unas secuencias de uno de los programas la serie "Más por menos" de TV2, titulado LA GEOMETRÍA SE HACE ARTE para hacer patente que la Geometría, en contra de la opinión de Dieudonné "entra por los ojos".

VÍDEO

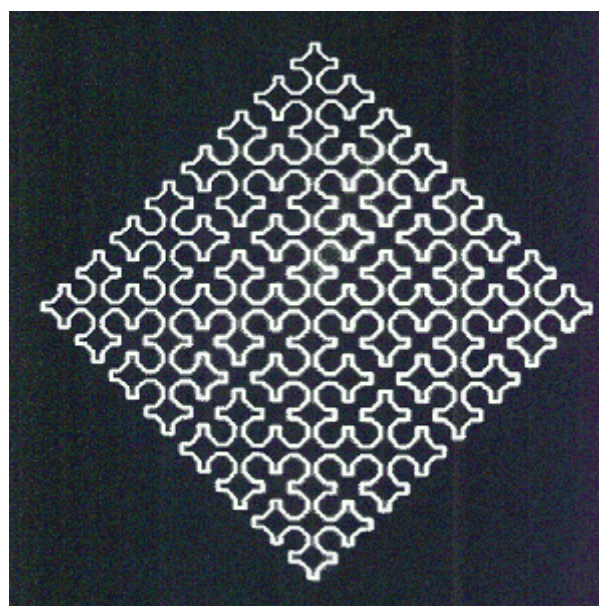
La Geometría se hacer Arte. Serie Más por Menos. La Aventura del Saber.TV2. 1996. 15 minutos. Autor: Antonio Pérez Sanz

Contenidos:

- La herencia matemática del mundo musulmán. Los números arábigos.
- El Arte Geométrico. Mosaicos nazaríes. Estrellas y lazos. Simetría de giro
- Grupos de simetría del plano.
- La partición periódica del plano. M. C. Escher

Segundo ejemplo: Teoría del Caos y fractales

Algunos pueden pensar, de forma bienintencionada, que los recursos audiovisuales



Fractales...la Geometría del Caos

constituyen en efecto un buen instrumento para hacer explícitas algunas propiedades elementales de la geometría clásica, pero que ahí termina su potencial. Nada más lejos de la realidad. El vídeo puede ser una herramienta valiosa para acercarnos a contenidos teóricos tan novedosos y actuales, por desgracia fuera del currículo de secundaria, como la Teoría del Caos y los fractales.

En este caso la imagen se vuelve imprescindible. Pero incluso la imagen estática no nos permite hacer evidente las propiedades intrínsecas de estos objetos. La

imagen en movimiento alcanza la cima de su justificación aplicada a la enseñanza de las Matemáticas.

VÍDEO

Fractales...la geometría del caos.

Serie Más por Menos. La Aventura del Saber.TV2. 1996. 15 minutos.

Autor: Antonio Pérez Sanz

Contenidos:

- Presencia de objetos fractales en la naturaleza.
- Características de los fractales. Autosemejanza. Dimensión. Iteración
- Mandelbrot y Julia
- Teoría del caos y fractales. Paradigmas científicos.

A estas alturas muchos estarán convencidos de las enormes posibilidades de los medios audiovisuales como recurso didáctico, incluso en las clases de Matemáticas. Otros pensarán que están bien para la enseñanza de la Geometría pero que ahí acaba su potencial. Se equivocan. Los títulos de esta misma serie Más por Menos demuestran que la práctica totalidad de los temas del currículo de secundaria pueden ser tratados de forma visual.

SERIE "MÁS POR MENOS"⁶. LA AVENTURA DEL SABER.TV2. TÍTULOS

- **PROGRAMA 1. El número áureo.**
- **PROGRAMA 2. Movimientos en el plano.**
- **PROGRAMA 3. La Geometría se hace Arte.**
- **PROGRAMA 4. El mundo de las espirales.**
- **PROGRAMA 5. Cónicas: del baloncesto a los cometas.**
- **PROGRAMA 6. Fibonacci. La magia de los números.**
- **PROGRAMA 7. Las Leyes del Azar.**
- **PROGRAMA 8. Números naturales. Números primos.**
- **PROGRAMA 9. Fractales... la geometría del caos.**
- **PROGRAMA 10. Matemática electoral.**
- **PROGRAMA 11. Un número llamado e.**
- **PROGRAMA 12. El lenguaje de las gráficas.**
- **PROGRAMA 13. Matemáticas y realidad**

Decididamente, Gauss llevaba razón al afirmar que las Matemáticas es una ciencia del ojo. Al menos es posible mostrarla a los jóvenes y menos jóvenes de una forma más "evidente".

Para aprender Matemáticas, para hacer Matemáticas es necesario "**ver las Matemáticas**" y las tecnologías actuales nos lo hacen posible.

Confiemos en que el año 2.000, el preámbulo del siglo XXI, sea por fin el del inicio de la victoria de la luz sobre la oscuridad. También en Matemáticas.

¹ *Guzmán, Miguel de*. El rincón de la pizarra. De. Pirámide. Madrid 1998

² *Ferrés i Prats, Joan*. Vídeo y Educación. De. Laia. Barcelona 1988

³ Las películas eran: Ángulos en la circunferencia y Generando cónicas. Se proyectará esta última

⁴ Matemáticas. Secundaria Obligatoria. MEC. 1992 Pp 107

⁵ El papel de las Nuevas Tecnologías en la Educación a Distancia. Antonio Pérez y Raúl Luna. Revista RED, nº 3, 4, 5, 6 y 7.

⁶ Más por Menos. Programas de TVE. Guión y presentación: Antonio Pérez. Realización: Pedro Amalio López.. Emitidos en TV2 en 1996 y 1998.