

EL TALLER DE MATEMÁTICAS: UN LUGAR PARA LA INVESTIGACIÓN

Antonio E. González García
José Luis Álvarez García

En abril de 1992, el Ministerio de Educación y Ciencia dicta las normas por las que se ha de regir la implantación anticipada de la ESO en las comunidades que, en aquellos momentos, no gozaban aún de competencias educativas, que constituían lo que se conocía popularmente como "*Territorio MEC*". Entre otras cosas, presenta varias materias para que puedan ser ofertadas como optativas, entre las que aparece el Taller de Matemáticas. En una resolución posterior se presentan los modelos de currículo para estas materias optativas. Años después, en febrero de 1996, las instrucciones para la implantación de enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria, regulan, entre otras cosas, la oferta de materias optativas en el primer ciclo de la ESO. Se establece que los alumnos y alumnas cursen preferentemente un segundo idioma, aunque, en determinadas circunstancias, puedan cursar una materia optativa distinta, y que por tanto deben ofertar los centros, relacionada con los ámbitos socio-lingüístico, científico-matemático o tecnológico-plástico, que permita reforzar o profundizar, según proceda, las capacidades recogidas en los objetivos generales de la etapa. Entre las materias que se proponen para ello se cita el Taller de Matemáticas. Las comunidades autónomas con competencias educativas siguieron un proceso normativo similar, y eso ha conducido a que en la actualidad el Taller de Matemáticas sea posiblemente una de las optativas de no obligada oferta que tienen un mayor nivel de implantación en la ESO. El número de horas semanales dedicado a esta materia varía de unas comunidades a otras entre 2 y 3 horas.

En qué se concreta realmente esta materia en los centros es más difícil de precisar, por las muchas y diversas orientaciones que se le dan. Concretamente la programación que ofrece como marco el MEC es una especie de *saco sin fondo* en el que casi todo vale. En la mayoría de los casos la materia se orienta hacia la resolución de problemas y se ofrece como un complemento de la asignatura de Matemáticas, que parece lo más coherente con su concepción inicial. No obstante, en algunos casos no es así y el Taller se convierte en "*más de lo mismo*" con respecto a las otras Matemáticas, en algo así como una clase de refuerzo en la que se trabaja sobre los contenidos que antes se van viendo en la asignatura de Matemáticas. En estos casos, los alumnos completan actividades de clase o incluso adelantan los "*deberes*" propuestos para casa; otros compañeros, los menos, reciben un "refuerzo" sobre los conceptos y procedimientos básicos de las Matemáticas o hacen actividades propiamente de ampliación de conocimientos.

Incluso entre quienes orientan el Taller hacia la resolución de problemas se pueden apreciar diferencias notables, que van desde quienes concretan su programación en actividades cortas, muy variadas y sin relación aparente entre sí, y quien orienta el Taller a la realización de trabajos más amplios, en forma de proyectos o pequeñas investigaciones. Lógicamente es posible encontrar un sinfín de situaciones intermedias.

Nuestra propuesta para el taller va en esta segunda línea. Creemos que así se puede profundizar más en los contenidos matemáticos que se abordan en el Taller, tanto cuando se trata de estrategias generales de resolución de problemas, como con contenidos más específicos de Geometría, Estadística, etc. y, al mismo tiempo, se consigue que los propios alumnos sean más conscientes de los aprendizajes que van adquiriendo. Además es más fácil adaptarse a la diversidad de capacidades, ritmos de aprendizaje, conocimientos previos, etc. del alumnado. En consecuencia con lo anterior, en el Taller se potencia la realización de proyectos o investigaciones, que casi siempre tienen una parte que se lleva a cabo en equipo y otra que se realiza individualmente. La programación del curso se concreta en siete u ocho de estos proyectos. En algunos de ellos las actividades se organizan en torno a un núcleo común, a partir del cuál surgen diferentes vías de profundización; el punto de salida es el mismo para todos, así como algunos de los objetivos que se proponen, pero el nivel de profundización al que se puede llegar puede ser muy distinto de unos equipos a otros o de unos alumnos a otros. Otros proyectos se llevan a cabo con la colaboración de toda la clase, pero se hace un reparto de las tareas que conlleva, con arreglo a los diferentes ritmos de trabajo y capacidades del alumnado que participa en el mismo. Algunos proyectos, incluso, tienen un poco de las dos características.

A continuación se expondrán las ventajas de esta forma de trabajar, utilizando como ejemplificación dos proyectos distintos: "*Contar y medir*" que pertenece a la programación del Taller de Matemáticas del

segundo ciclo de la ESO y *"Matemáticas en el supermercado: la cesta de la compra"*, que es un proyecto del primer ciclo de la ESO

"Matemáticas en el supermercado: la cesta de la compra"

Periódicamente la Organización de Consumidores y Usuarios (OCU) elabora informes sobre lo que denominan el "precio de la cesta de la compra". Estos informes, en los que se comparan los precios de una serie de productos de consumo habitual, en los principales supermercados de las ciudades españolas más relevantes, permiten comparar tanto la evolución de los precios como las diferencias de precios entre las diferentes cadenas de supermercados y, además, entre las distintas ciudades. Generalmente sus resultados son muy elocuentes y, por tanto, suelen ser de bastante utilidad para los consumidores. Esta es la idea de la que se parte en este trabajo que se ha realizado en el Taller de Matemáticas con un grupo de 26 alumnos y alumnas de 2º de la ESO. El estudio, del que a continuación se ofrecen más detalles, se llevó a cabo en Avilés, tomando como referencia los precios de una selección de productos en los siete supermercados más importantes de la ciudad. Los objetivos que se persiguen con la realización de este trabajo fueron:

- Matemáticas y vida cotidiana: el supermercado es uno de los primeros lugares donde los chicos y chicas pueden el papel de las matemáticas en la vida cotidiana.
- Educación para el consumo: el estudio proporcionará datos relevantes para la reflexión, que permitirán a los alumnos y alumnas valorar los aspectos más relevantes que han de tener en cuenta como consumidores.
- Realizar un trabajo en equipo, en el que participarán todos los estudiantes y en el que se harán actividades tanto dentro como fuera del aula.
- Elaborar un informe final con los resultados del trabajo para su presentación en el centro y para su publicación en la prensa local.

Aunque realmente no son muchos los contenidos matemáticos que se utilizan en el desarrollo del trabajo, sí es interesante resaltar que las características de la situación en que se aplican contribuye a reforzar un aprendizaje significativo de estos contenidos. Se trata fundamentalmente de cuestiones de Estadística y de Aritmética que a continuación se detallan:

- Estadística:
 - Preparación de un estudio estadístico
 - Recogida de información
 - Organización de la información: construcción de tablas
 - Obtención de valores relevantes: máximo, mínimo, medio.
 - Conclusiones finales: elaboración de un informe

P Aritmética:

- Números y operaciones
- Porcentajes
- Números aproximados: redondeo

Desarrollo del estudio

Los alumnos, organizados en equipos de 4 o 5 componentes, trajeron a clase hojas y folletos publicitarios de todos los supermercados que les fue posible (los que habitualmente suelen encontrarse en los buzones o vienen con los periódicos) y analizaron someramente su contenido. Tras este primer análisis se hizo una clasificación de los productos anunciados en siete grupos (es bastante habitual que los propios folletos ofrezcan pistas para hacer esta clasificación). A continuación, se buscaron los productos de cada uno de estos grupos que tuvieran un mayor uso familiar (para esta cuestión pidieron información en sus respectivas casas). Finalmente se elaboró la lista definitiva que contenía un total de 55 productos de consumo habitual, divididos en 7 grupos:

- P Bebidas (6 productos): agua, zumo, vino, ...
- P Droguería y Perfumería (8 productos): detergente, champú, ...
- P Productos lácteos (6 productos): leche, queso, yogur, ...
- P Congelados (5 productos): precocinados, ...
- P Frutas y verduras (5 productos): manzana, lechuga, ...
- P Carnes (5 productos): pollo, filete ternera, ...
- P Alimentación (20 productos): pan, arroz, aceite, ...

Una vez decididos los productos de la lista, debía concretarse más su presentación. Por ejemplo, se había decidido incluir el agua mineral, pero, ¿qué tamaño de botella? ¿qué marca? Para ello, siguiendo el modelo de los estudios de la OCU, se decidió elaborar dos listas: una compuesta por productos con marca y otra por productos sin marca. La primera lista, que llamaríamos en adelante CESTA 1, estaría formada por

productos de marcas conocidas de cierta calidad y, en cada caso, presentados con un tamaño o envase determinados; por ejemplo: *pack de 6 yogures naturales de Central Lechera Asturiana*. Los distintos precios de los productos de esta lista permitirían comparar precios en los diferentes supermercados. La segunda lista, que llamaríamos CESTA 2, estaría formada por los mismos productos pero sin especificar la marca, aunque sí el tamaño o envase; por ejemplo: *pack de 6 yogures naturales*. Con esta segunda lista lo que trataríamos de ver es el precio más barato al que puede comprarse en el supermercado si no nos importa la marca de lo que compramos.

La elección de los supermercados se hizo con dos criterios: que tuvieran un tamaño más o menos grande y que estuvieran situados en el barrio o no muy alejados de él. Finalmente se eligieron los siete siguientes: EL ÁRBOL, ALIMERKA, ALDI, DIA, MAS Y MAS, PEYMA, SIMAGO.

Finalmente se prepararon unas hojas para la recogida de precios, se repartió el trabajo entre los diferentes equipos de tal manera de que cada supermercado fuera visitado por un sólo equipo, y se proporcionaron instrucciones precisas de lo que debería hacerse en los supermercados. Además el profesor preparó una carta dirigida a los encargados de los establecimientos, que los equipos debían presentar a su llegada, en la que se indicaba el objetivo del trabajo y se pedía su colaboración con los estudiantes. Todos aceptaron de buen grado la invitación que se les hacía y facilitaron al máximo el trabajo de los equipos.

Una vez recogida la información, se hizo un reparto del trabajo posterior entre todos los grupos. Debían organizar la información en tablas que permitieran comparar los precios de los productos de cada uno de los grupos establecidos en los diferentes supermercados, tanto para la CESTA 1 como para la CESTA 2. Además debían destacar el precio más bajo y el más alto de cada producto, así como los supermercados a los que correspondían, hallar el precio medio, el rango de precios, los supermercados con precios superiores a la media e inferiores a la media. Con todos estos datos debían elaborar un pequeño informe de cada grupo de alimentos. Esto debían hacerlo tanto con la CESTA 1 como con la CESTA 2. Como se ha dicho, esta tarea se realizó en equipo, de tal forma que juntando el trabajo de todos los equipos teníamos el estudio global que buscábamos. Cada grupo presentó a la clase los resultados de su estudio y finalmente se estableció un debate sobre los aspectos que más llamaban la atención de los trabajos expuestos.

Con los resultados globales de cada grupo de alimentos, que se habían obtenido en el trabajo anterior, se debía hacer un trabajo final de síntesis. Su esquema era similar al anterior (precio más bajo, más alto, medio, etc...), solamente que ahora no era necesario especificar los distintos productos, sino los grupos de productos en su totalidad, así como los precios globales de la cesta de la compra en cada supermercado. Este trabajo final debía ser realizado de forma individual. El nivel general de estos trabajos fue muy satisfactorio. Además, y como es habitual en todos los trabajos que se realizan en el taller, se pedía una valoración de la actividad realizada que en todos los casos fue muy positiva.

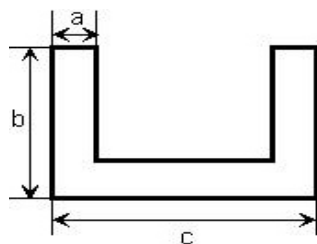
"Contar y medir indirectamente: las fórmulas cuentan su historia"

Es poco habitual trabajar en nuestras clases los aspectos relacionados con la construcción de fórmulas; menos habitual aún es tratar sobre su significado e interpretación. Sin embargo, los alumnos y alumnas han de aprender y utilizar un número considerable de fórmulas, sin más recurso que la memoria, por lo que este aprendizaje carece de la necesaria significatividad y está, en consecuencia, abocado al olvido o, en el peor de los casos, a una gran confusión. Entre las razones de esta ausencia sin duda están los poco satisfactorios resultados que se obtienen al abordar estos contenidos en las condiciones habituales del aula (escaso tiempo para consolidar los conceptos y procedimientos, ausencia de materiales de apoyo, ...), así como el hecho de que los polinomios, las operaciones algebraicas y la resolución de ecuaciones monopolizan en la práctica los contenidos algebraicos habituales en la ESO. La experiencia de aula que vamos a comentar brevemente se relaciona con el método y los procedimientos para construir fórmulas algebraicas, así como con su significado e interpretación; más concretamente, nos centraremos en la última fase de aprendizaje, que se refiere a la reversibilidad de los conceptos y procedimientos implicados: Dada una fórmula: ¿cómo se lee inteligentemente?, ¿qué significa?, ¿cómo se ha construido?, ¿de qué otras formas podría escribirse y, en su caso, qué proceso de construcción está implícito?

Para ello, hemos elegido fórmulas relacionadas con medidas geométricas, con objeto de poder utilizar materiales manipulativos que faciliten la comprensión y el aprendizaje. Las actividades propuestas despiertan mucho interés en los estudiantes y demuestran ser especialmente eficaces en el aprendizaje que nos proponemos y, paralelamente, permiten ampliar el significado y la necesidad de aprender ciertos contenidos algebraicos clásicos: interpretación y lectura de una expresión algebraica, elementos que la componen, cálculos y simplificaciones, ... Para su desarrollo en clase, al menos en las primeras actividades, es imprescindible utilizar material manipulativo adecuado que permita visualizar el proceso de construcción de la fórmula: descomponer en partes de medida conocida, duplicar, descomponer u recomponer (método puzzle), completar una forma de medida conocida (método marco). Por ello, el Taller de Matemáticas (o la

clase de matemáticas convertida en taller) y el trabajo en pequeño grupo es imprescindible para su realización.

Lo que en definitiva se pretende es enseñar a leer inteligentemente las fórmulas, dando sentido y significado a la expresión y a sus partes, y a deducir de dicha lectura el proceso seguido para su construcción, verificando posteriormente con los materiales manipulativos de que se dispone y/o gráficamente la bondad de dicha interpretación: LAS FÓRMULAS CUENTAN UNA HISTORIA. Para ilustrar brevemente la propuesta, hemos elegido dos tópicos: fórmulas de áreas de superficies planas y número de cubitos del armazón de un cubo. Evidentemente, la propuesta sería igualmente válida siempre que el tópico elegido tenga la dificultad adecuada y sea fácil su representación real y/o gráfica (números poligonales, diseños con baldosas, ...).



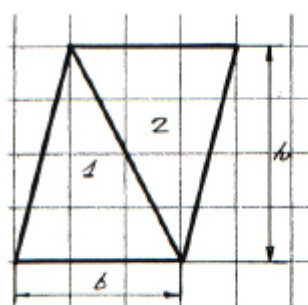
$$A = 2bc + ac - 2c^2$$

$$A = c[2b + a - 2c]$$

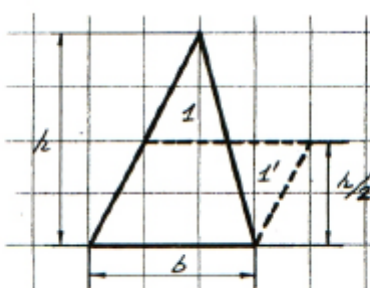
La lectura inteligente y posterior interpretación de una fórmula permite conocer el procedimiento que se ha utilizado para su obtención: nos cuenta su historia. Si se trata de una suma, parece indicar que la fórmula se ha obtenido por descomposición; si es una resta, sugiere que la fórmula se ha obtenido completando otra figura de medida conocida y luego restando la medida, también conocida, de la parte que se utilizó para completarla.

En el caso de las áreas de algunos polígonos ya conocen la mayoría de las fórmulas, pero no saben cómo se han obtenido ni las diversas posibilidades e interpretaciones que existen. ¿Sabrías explicar cómo se han obtenido estas fórmulas?

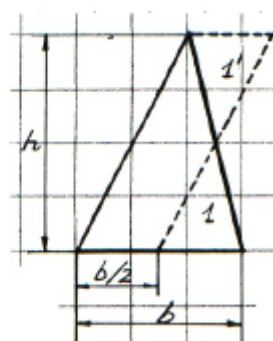
La fórmula del área de un triángulo admite tres formas de escritura que dan lugar a distintas interpretaciones. Cada una de ellas *cuenta una historia distinta*.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$



$$A = b \cdot \frac{h}{2}$$



$$A = \frac{b}{2} \cdot h$$

¿Qué formas distintas admite la fórmula del área de un trapecio?, ¿Qué historias nos cuentan? ¿Y la fórmula del área de un rombo?

La siguiente actividad supone una continuación natural de la anterior y servirá como refuerzo de la misma. Se trata de un contexto nuevo: hallar el número de cubitos necesarios para construir el **armazón de un cubo** con "n" cubitos de arista (en la figura inferior aparece un cubo de 6 cubitos de arista). Pero es un contexto cercano al anterior, donde también aparecen áreas, pero se incorporan longitudes y volúmenes y, sobretudo, se hace evidente la variedad de procedimientos inteligentes de contar y la equivalencia entre las fórmulas correspondientes. La actividad comienza con la presentación por el profesor de distintos armazones contruidos, el análisis de las características numéricas comunes de los diversos armazones (nº de caras, vértices y aristas) y la característica diferenciadora (nº de cubitos por arista), lo que implica la existencia de una fórmula general que nos "dice" el nº total de cubitos dependiendo del nº de cubitos de arista. Se plantea así la cuestión de fondo: *¿qué historia cuenta cada fórmula?* El profesor muestra algunas fórmulas posibles y explica razonadamente su significado, utilizando para ello los armazones de cubos de que dispone. Es importante en esta fase insistir en la observación del grado de los términos y su necesaria homogeneidad: grado 1, si se ha contado por longitudes; grado 2, si se ha hecho por superficies y grado 3 si se trata de volúmenes. Tras ello, se pide que justifiquen otras fórmulas (algunas de las que más abajo se muestran), para lo que disponen del material adecuado. A continuación han de encontrar más fórmulas, distintas a las

anteriores, justificando cada una de ellas. Finalmente, mediante la simplificación algebraica de las diversas fórmulas han de comprobar su bondad y equivalencia.

- 1.- $N = 4 \cdot [n + (n-2)] + 4(n-2)$ 9.- $N = 4n + 8(n-2)$
- 2.- $N = n^3 - (n-2)^3 - 6(n-2)^2$ 10.- $N = 2 \cdot [2n + 4(n-2)]$
- 3.- $N = n^3 - n(n-2) - 4(n-2)$ 11.- $N = 2(4n-4) + 4(n-2)$
- 4.- $N = 12n - 2 \cdot 8$ 12.- $N = 4 \cdot [3(n-2)] - 4$
- 5.- $N = 2 \cdot [6(n-2) + 4(n-2)]$ 13.- $N = 2 \cdot [4(n-1)] + 4(n-2)$
- 6.- $N = 2 \cdot [2n + 2(n-2)] + 4(n-2)$ 14.- $N = 4 \cdot [n + 2(n-2)]$
- 7.- $N = 12(n-2) + 8$
- 8.- $N_n = N_{n-1} + 12$ { $N_2 = 8$; $N_n = 8 + 12(n-2)$ }

