

Matemáticas y mercados financieros

por

José Luis Fernández
Universidad Autónoma de Madrid

1 Matemáticas y Economía.

Desde siempre las matemáticas se han aplicado a cuestiones de comercio, de economía y de finanzas.

Se trata de una relación con diversos niveles y múltiples facetas, aunque aquí nos centraremos en algunos aspectos muy concretos y a un nivel básico.

Por supuesto, las matemáticas son un lenguaje esencial para el comercio. Esto es claro. Pero quizás convenga recordar, por ejemplo, que nuestro querido número e nace para calcular intereses que se componen de manera continua, o el papel que el cálculo de probabilidades desempeña en la industria del seguro.

Las ciencias todas tienen a las matemáticas no sólo como su lenguaje sino también como su soporte conceptual. Se piensa en ciencia pensando en matemáticas. Y la economía, la ciencia económica, no es ninguna excepción a esta regla.

Aquí nos centraremos en un aspecto concreto de la economía: las finanzas.

2 Matemáticas y finanzas.

Las primeras conceptualizaciones matemáticas de asuntos financieros son debidas a Daniel Bernoulli. En un artículo de finales del siglo XVIII en la Academia de San Petersburgo sobre la *medición del riesgo*, Bernoulli introduce la función de utilidad y a la varianza como medición del riesgo.

En 1900 Louis Bachelier (alumno de Poincaré) introduce el movimiento browniano (antes que Einstein o Wiener) en su tesis doctoral *Teoría de la especulación* para analizar el comportamiento de los mercados financieros.

Markowitz en los años 50 inicia la teoría de carteras y de inversiones, en la que nos centraremos más adelante. Markowitz y algunos de lo que desarrollaron estas teorías, como Sharpe, recibieron sendos premios Nobel en los años setenta.

El análisis de Bachelier lo retoma y mejora Samuelson (Premio Nobel) en los años 60 proporcionando un esquema en el que se enmarca la moderna teoría de opciones merecedora también de premios Nobel: Merton, Scholes (F. Black hubiese sido galardonado con el Nobel sino hubiera fallecido en 1995).

3 Relevancia en educación.

Así que estos dos aspectos del **uso de las matemáticas en las finanzas y los mercados financieros** tienen pedigrí: desde Bernoulli pasando (tangencialmente) por Poincaré hasta unos cuantos premios Nobel (en economía, a matemáticos y físicos).

Pero, ¿qué es lo que hace relevante en el contexto en que nos encontramos? Hay varias razones.

- Es un ejemplo importante de modelización matemática, de como se crea un modelo para entender una realidad. A veces pensamos en la modelización matemática de aspectos científicos como una herramienta para realizar predicciones dentro de esa ciencia que permitan confirmar sus teorías, pero, sobre todo, sirven para entender mejor la realidad a estudio.
- Se trata de una modelización simple que no requiere más conceptos que los de media, varianza y correlación.

Es un ejemplo que permite exhibir claramente a la modelización matemática en acción, a las matemáticas pensando el mundo, sin grandes andamiajes conceptuales.

Y esto es muy importante.

- Se trata de un conocimiento útil, relevante, usado en la práctica por bancos, por gestoras de fondos, por compañías de seguros, en asuntos tales como seguros, pensiones, hipotecas.

El uso instrumental de estas teorías es, en general, complejo y elaborado, pero las ideas básicas son simples.

- Se trata de modelos revisables, adaptables: se puede jugar con ellos, manipularlos.
- Se puede experimentar con ellos. Se pueden simular en el ordenador de manera sencilla, y sobre estas simulaciones hacer análisis y tomar decisiones que tras un tiempo pueden ser contrastadas.
- Finalmente, creo que es importante señalar que podemos hacer análisis con datos reales obtenidos, por ejemplo, de los periódicos.

4 Inversiones.

Vamos a centrarnos en una de las aplicaciones de las matemáticas a estas cuestiones económicas, el de las **inversiones**: la teoría de carteras de Markowitz.

4.1 Conceptos.

Un **activo** es un instrumento financiero. Tiene un **valor** que identificamos con su **precio**, a pesar de la admonición de Machado. Un activo se compra y se vende, y con el tiempo su valor/precio va cambiando.

Sólo vamos a tener en cuenta un único periodo de tiempo, un **horizonte de inversión**, que quedará fijo en lo que sigue.

La **rentabilidad** de un activo S en ese periodo de tiempo se mide mediante

$$R = \text{rentabilidad} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}$$

Los valores S_0 y S_1 son los que el activo tiene, respectivamente, al principio, hoy, tiempo 0, y al final, tiempo 1, del periodo de tiempo en consideración. La rentabilidad R descrita es la rentabilidad simple o efectiva. Mide la variación porcentual del activo en el periodo de tiempo bajo consideración.

S_1 es una cantidad desconocida hoy. La **modelizamos** como una variable aleatoria. Es decir, como si sus valores se escogieran de una cierta urna, como en una lotería.

Pero conviene centrarse en R . R también es, claro, una variable aleatoria. La ventaja de considerar la rentabilidad R y no el nivel de precios S es que R es una cantidad homogénea: se trata de valores relativos. Dado S_0 , conocer R y conocer S_1 son cuestiones equivalentes. Para comparar dos activos nos fijamos en sus rentabilidades.

De un activo, nos interesarán sólo dos estadísticos referidos a su rentabilidad: la rentabilidad media, es decir, la esperanza de su rentabilidad, el valor esperado de su rentabilidad: $\mu = \mathbf{E}(R)$. Y la varianza de su rentabilidad: $\sigma = \mathbf{V}(R)$.

Las decisiones sobre cómo invertir van a venir determinadas por el conocimiento de μ y de σ de los activos en que podamos o en que nos interese invertir en un periodo de tiempo determinado. ¿De dónde se obtiene esta información? Ésta es una cuestión clave. Normalmente este dato lo obtiene el inversor a través de análisis de la evolución previa de los activos y de información que tenga sobre la posible evolución futura de esos activos. Es todo un arte.

Lo que vamos a ver es cómo usar esa información para tomar decisiones sobre las inversiones.

Desde Bernoulli, a la varianza de la rentabilidad se la conoce como **riesgo** del activo. Hay que tener cuidado con lo que esto significa. Si de un activo sabemos que va a bajar un 10% con absoluta seguridad, ahí no hay riesgo. Por el contrario si un activo va a subir entre un 10% y un 20%, pero no sabemos cuanto, ahí hay riesgo. Normalmente, en el lenguaje usual, riesgo viene asociado con sucesos con repercusiones negativas. Sin embargo, no es éste el caso en finanzas.

A la rentabilidad media la denominaremos **retorno**.

4.2 Representación.

Como hemos dicho más arriba, de cada activo sólo necesitamos su retorno y su riesgo.

Utilizaremos un sistema de coordenadas para representar la información sobre los activos. En el eje de las X pondremos el riesgo y en el eje de las Y pondremos el retorno.

Es el **plano de riesgo-retorno**.

En la figura (1) aparecen dos activos A y B con coordenadas respectivas $(2, 1)$ y $(3, 4)$.

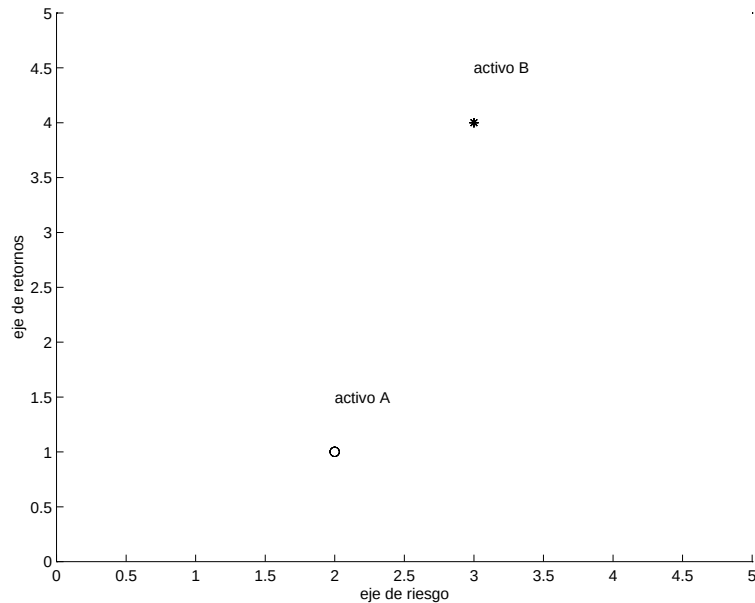


Figura 1: Plano riesgo-retorno.

5 Preferencias.

En cuanto tenemos varios activos representados en el plano de riesgo-retorno como en la figura (2), enseguida nos preguntamos. ¿Cuál preferimos?

Este es un ingrediente clave. Las **preferencias** son inherentes al inversor: Cada uno de nosotros tenemos un sistema personal de preferencias, aunque hay varios ingredientes que son comunes, o casi, a todos los inversores. En general, somos **aversos al riesgo**. A igualdad de riesgo preferimos el activo con mayor retorno y a igualdad de retorno el de menor riesgo.

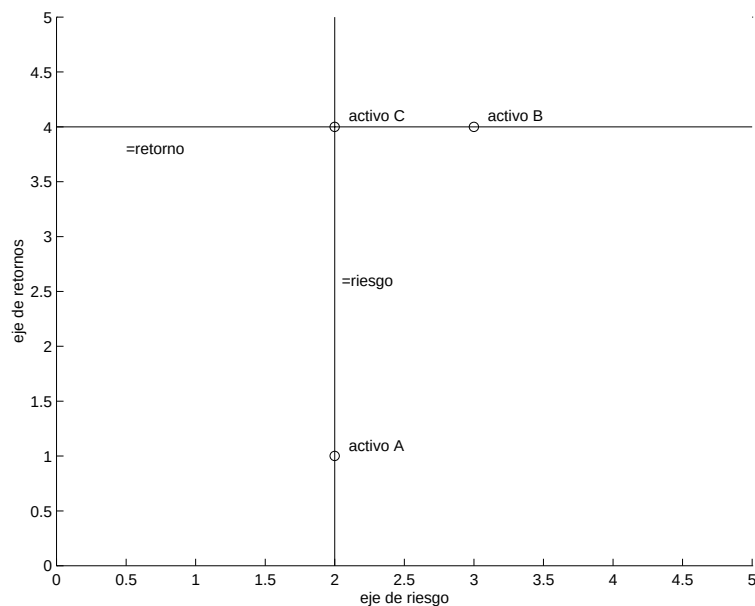


Figura 2: Preferencias.

En la figura (2) todos preferimos el activo C al A y el activo C al B , pero cada uno tendrá sus preferencias entre A y B . Por ejemplo, para un inversor para el que el riesgo sea irrelevante (neutro ante el riesgo), es decir, para un inversor que sólo se fija en el retorno, será preferible B a A , a pesar de su mayor riesgo. Mientras que para un inversor profundamente averso al riesgo, es decir, que huye del riesgo, A es preferible a B , a pesar de su menor retorno. La mayoría de los inversores tiene preferencias que se encuentran en una situación intermedia a los dos extremos que acabamos de describir.

5.1 Función de utilidad.

Vamos a describir, a modelizar, nuestras preferencias dando a cada punto del plano de riesgo-retorno un valor entre 0 y 1, por ejemplo. Los puntos con valor 1 son los más apreciados y los puntos con 0 los menos apreciados. Tenemos pues una función u del plano de riesgo-retorno. Lo importante son las curvas de nivel de esta función u y su posición relativa unas de otras; los valores concretos de la función de utilidad no son tan importantes. Esta función u es la **función de utilidad**.

Consideremos la función de utilidad (de un cierto inversor) como la de la figura (3). La pendiente de las curvas de nivel es pequeña y eso significa que el inversor no es particularmente averso al riesgo.

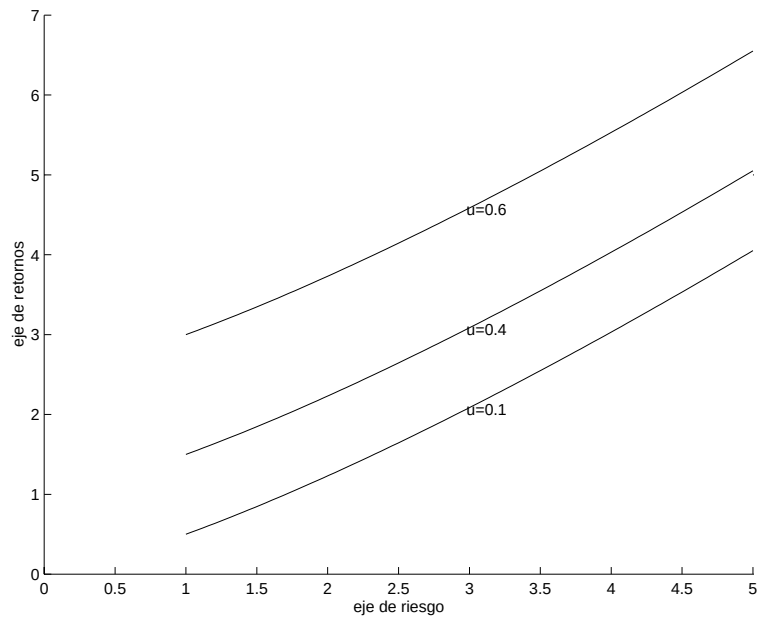


Figura 3: Función de utilidad de un inversor.

Vamos a ver de qué nos informa sobre los activos A , B y C de la figura (2). Basta superponer las dos gráficas (de las figuras (2) y (3)) como en la figura (4).

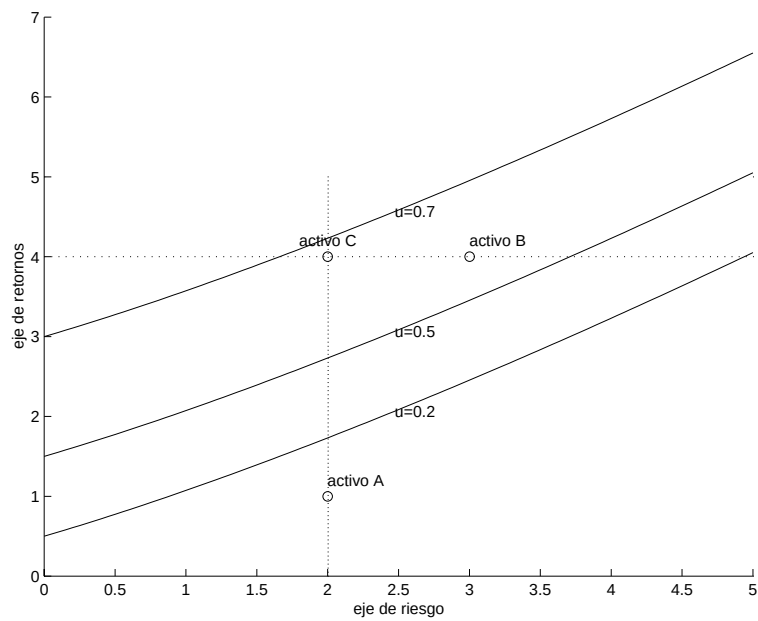


Figura 4: Comparación de activos.

La conclusión es que este inversor prefiere B a A . Obsérvese que si la pendiente de las curvas de nivel de la función de utilidad fuera muy grande entonces A sería preferible a B .

6 Carteras.

Tenemos dos activos A y B . Vamos a invertir en esos dos activos para formar una cartera. Lo relevante no es la cantidad de dinero a invertir (lo que por otra parte requeriría los datos de los precios actuales de los dos activos) sino los porcentajes a invertir en los dos activos.

Pongamos que en A invertimos una proporción λ , un número entre 0 y 1, y, claro, en B , invertimos $1 - \lambda$. (Resulta más cómodo usar números entre 0 y 1 que no porcentajes.) Denotemos la cartera así formada por C .

Queremos calcular el retorno y el riesgo de la cartera C : para el retorno no necesitamos más información, pero para calcular el riesgo de C necesitamos la correlación entre las rentabilidades de A y de B . Supongamos que ésta es ρ .

Significado de ρ . Recordemos que ρ está comprendido entre -1 y 1 . A grandes rasgos, el significado cualitativo de ρ es el siguiente: si ρ es próximo a 1 entonces si la rentabilidad de A es alta entonces la rentabilidad de B será alta, si ρ es próximo a -1 entonces una rentabilidad alta de A presupone una rentabilidad baja de B , y, finalmente, ρ próximo a cero no permite extraer conclusiones de relación, como las anteriores, entre las rentabilidades de A y B .

Un cálculo directo nos da que el retorno, μ_C , y el riesgo, σ_C , de C vienen dados por

$$\begin{cases} \mu_C &= \lambda\mu_A + (1 - \lambda)\mu_B \\ \sigma_C &= \sqrt{\lambda^2\sigma_A^2 + (1 - \lambda)^2\sigma_B^2 + 2\rho\lambda(1 - \lambda)\sigma_A\sigma_B} \end{cases}$$

La situación es la siguiente. En el plano riesgo-retorno de la figura (5) hemos puesto dos activos A y B , de coordenadas riesgo-retorno respectivas $(3, 1)$ y $(4, (4.5))$ y todas las carteras a que dan lugar cuando los combinamos, suponiendo distintos valores de correlación entre ellos.

Las carteras marcadas con “o” en la figura (5) tienen todas un 80% de A y un 20% de B , es decir, corresponden a $\lambda = 0.8$. Obsérvese que todas estas carteras tienen la misma rentabilidad, 1.7, pero que sus riesgos disminuyen según el coeficiente de correlación va bajando desde 1 a -1 .

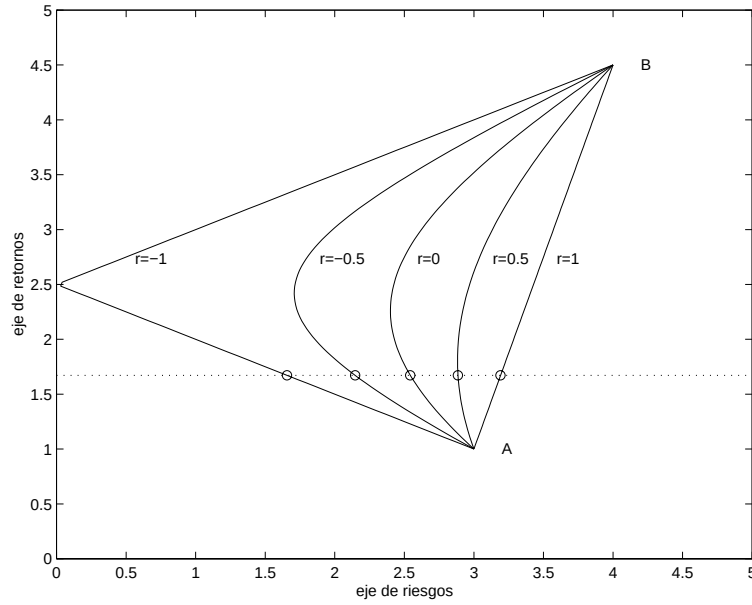


Figura 5: Carteras con dos activos.

La conclusión es muy importante. Quiere decir que **conviene diversificar** la inversión entre activos que tienen entre sí correlación negativa. En lenguaje llano, se trata de no poner todos los huevos en el mismo cesto, porque en ese caso, puede que no se nos caiga el cesto, pero si se nos cayera los perdemos todos. Al ponerlos en cestos distintos, puede que se nos caiga uno de los cestos, pero es improbable que se nos caigan los dos. Cestos distintos significa $\rho \approx 0$.

6.1 La región de carteras.

Cuando tenemos activos A , B , C , por ejemplo, la colección de todas las carteras formadas utilizando estos tres activos es la de la figura (6). La denominaremos **región de carteras**.

Se trata de todas las carteras en las que se invierte a en A , b en B , y c en C , donde a, b, c son todos positivos y suman 1.

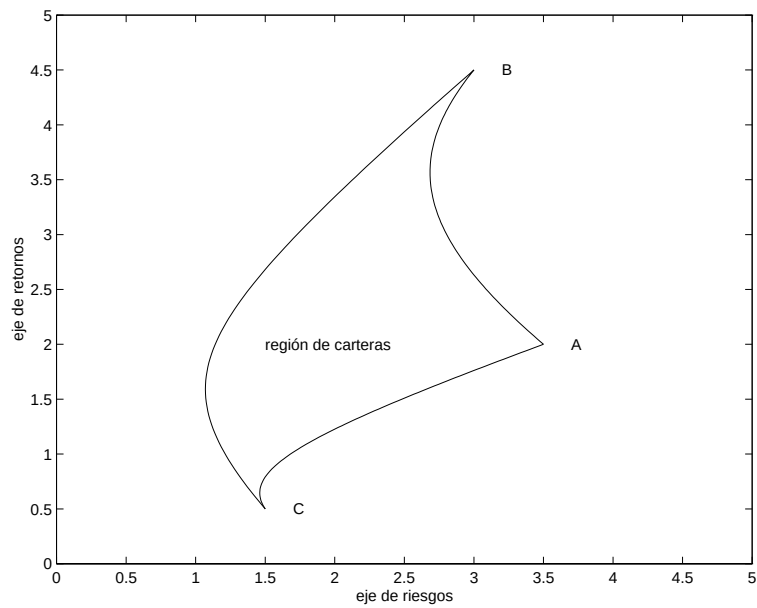


Figura 6: Carteras a seleccionar.

6.2 Selección de carteras.

La selección ahora consiste en averiguar qué punto de la región de carteras (que estará necesariamente en su borde) tiene un valor máximo de la función de utilidad. Gráficamente esto es muy fácil: vamos mirando curvas de nivel de la función de utilidad (en el sentido de utilidad creciente) hasta el último valor de nivel para el cuál todavía tocamos a la región de carteras. Ese punto de tangencia determina la **cartera óptima**. Véase la figura (7)

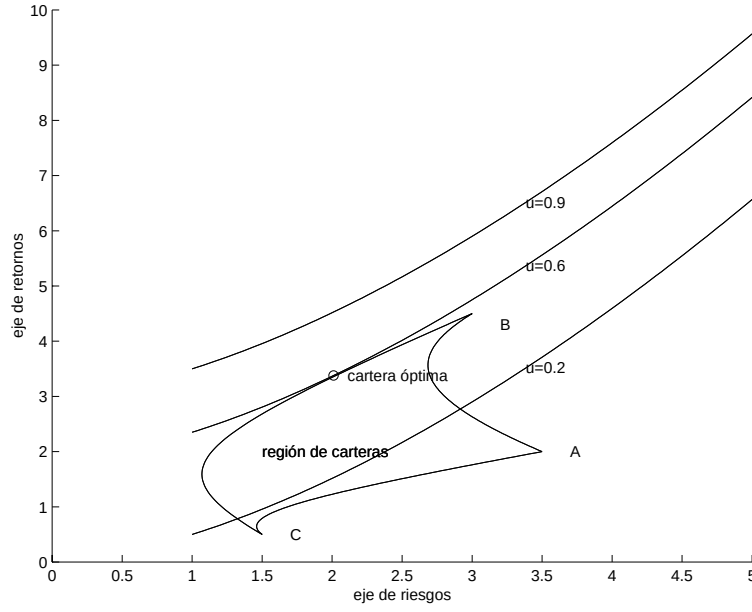


Figura 7: Cartera óptima.

6.3 Incluyendo renta fija.

Hay una inversión especial: la renta fija, el préstamos al Estado. Su riesgo es cero.

Denotemos esa inversión por O . Como el riesgo de O es cero, su rentabilidad no es aleatoria, es una constante. Pongamos que ese valor constante es r . Las coordenadas riesgo-retorno de O son $(0, r)$. Lo que esto significa es que si invertimos 1 euro en O , al final del periodo de tiempo en consideración, tendremos $1 + r$ euros.

O es especial: si formamos una cartera D con un activo con riesgo A y con O en las proporciones respectivas λ y $1 - \lambda$ tenemos

$$\begin{cases} \text{retorno de } D &= \lambda(\text{retorno de } A) + (1 - \lambda)r \\ \text{riesgo de } D &= \lambda(\text{riesgo de } A) \end{cases}$$

Es decir, la posición de la cartera D en el plano riesgo-retorno está en el segmento que une las posiciones de A y de O .

Al incluir el activo sin riesgo, la región de carteras se agranda conectando cada punto de la región de carteras original con el punto $(0, r)$. Así, por ejemplo, la región de carteras de los activos A , B y C de la figura (6) se transforma en la región de carteras de la figura (8) al incluir el activo sin riesgo O que tiene rentabilidad $r = 0.5$.

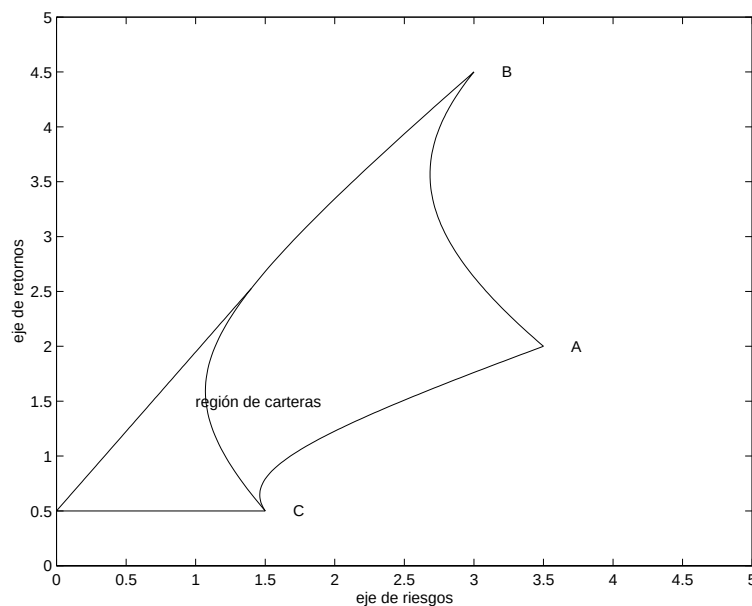


Figura 8: Región de carteras con renta fija.

La selección de carteras opera ahora de la misma manera que antes pero utilizando esta región más grande.

7 Determinación cualitativa de una función de utilidad.

El concepto más difícil de aprehender en todo esto es sin duda el de función de utilidad.

Vamos a describir a continuación un sencillo ejemplo de cómo determinar (o mejor, consensuar) una cierta función de utilidad. Es un planteamiento un tanto ingenuo (digamos que de primer orden), pero que contiene las ideas esenciales y puede dar lugar a una discusión participativa en la que se inste a pensar en las distintas actitudes ante el riesgo inversor (un concepto en realidad mucho más amplio que el de las inversiones, de hecho, un capítulo de la Psicología).

Recordemos que lo importante no es la función de utilidad sino sus curvas de nivel.

En lo que sigue vamos a buscar una función de utilidad en la que las curvas de nivel son rectas paralelas. Basta pues que se determine una de las rectas.

- Necesitamos un punto de referencia en el plano riesgo-retorno.

Pensemos en una lotería, A , juego de cara/cruz, en la que si apostamos 10,000 obtenemos 20,000 a cambio, con probabilidad $1/2$, o perdemos lo apostado, con probabilidad $1/2$.

La rentabilidad R_A , de A , es la variable aleatoria

$$R_A = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } 1/2 \\ -1, & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

Así que el retorno de A es 0 y el riesgo es 1. Las coordenadas de A son $(1, 0)$.

A este juego/activo le adjudicamos una determinada utilidad, cuyo valor es irrelevante. Aditamos que nos es un juego muy atractivo, no nos interesa ni mucho ni poco, casi nos da igual.

- Planteamos ahora una segunda lotería, B , en la que hay que determinar un determinado ingrediente para que lo consideremos de la misma utilidad/interés que el anterior.

La lotería B a la que nos referimos es una en la que para entrar hay que apostar 100,000. Con probabilidad de $8/9$ perdemos la apuesta. Y con la probabilidad restante, $1/9$, obtenemos una cierta cantidad x por determinar.

Se trata ahora de decidir, de consensuar, que valor tiene que tener x para que esta lotería empiece a resultarnos “razonable”, más precisamente equivalente en interés al insulso A . Conviene no olvidar el nivel de la apuesta requerida (de 100,000).

Pongamos que hemos determinado que un valor de x de 101,000,000 ya es razonable. Para este caso la rentabilidad R_B viene dada por

$$R_B = \begin{cases} 99, & \text{con probabilidad } 1/9 \\ -1, & \text{con probabilidad } 8/9 \end{cases}$$

que tiene retorno 10.11 y riesgo 29.86

La recta que une a las dos loterías/activos A y B en el plano riesgo-retorno determina una curva de nivel de la función de utilidad. Las otras curvas de nivel son las rectas paralelas a ésta. Véase la figura (9).

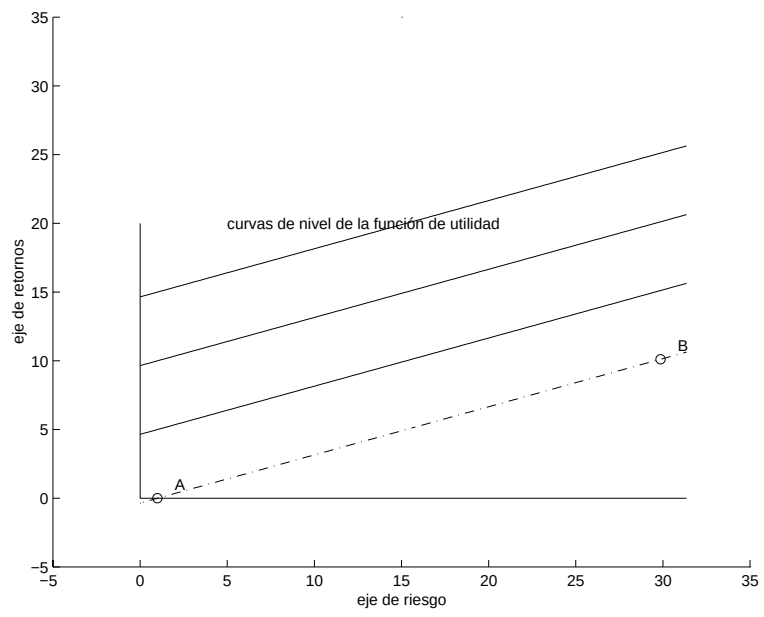


Figura 9: Una función de utilidad.

8 Algunas lecturas recomendadas.

- Bernstein, *Against the Gods*, Wiley.
- Pliska, S., *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell.
- Sharpe, Alexander, Bailey, *Investments*, Prentice Hall.