

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ABSTRACCIÓN

Felipe Gago Couso

Resumen

Se trata de poner de manifiesto como la Resolución de Problemas y la Abstracción pueden ayudarse mutuamente a todos los niveles educativos, en particular a nivel universitario. Para ello tomamos como punto de partida un problema de la Olimpiada Matemática Española. Comenzamos por presentar diferentes soluciones y a continuación exploramos las relaciones entre los diferentes métodos para generalizar los conceptos que aparecen. Si conseguimos transmitir la idea de que el Proceso de Generalización sigue los principios básicos de la Resolución de Problemas habremos logrado nuestro objetivo.

Problema: ¿Cuántas listas de n números se pueden formar con 0's y 1's, conteniendo un número par de 1's?

¿Cuántos rectángulos de $m \times n$ números se pueden formar con 0's e 1's, de modo que todas las líneas horizontales contengan un número par de 1's?

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & n & & & \\ & & & & \hline 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{array} \Bigg| m$$

¿En cuántos de estos todas las líneas verticales contienen también un número par de 1's?

Destacar que el verdadero problema es la tercera pregunta, es decir: cuántas matrices $m \times n$ se pueden formar con 0's y 1's de forma que sus filas y columnas contengan siempre un número par de 1's. El enunciado contiene los básicos de un proceso de generalización: análisis de casos particulares y extracción de los patrones generales que intervienen en la solución.

Solución 1.-

Partir de una lista de $n-1$ elementos y ver que se puede completar de modo único a una lista de n elementos con la propiedad pedida: añadir u 1 si contiene un número impar de 1's, o añadir 0 si contiene un número par. Por tanto hay tantas listas con la propiedad requerida como listas arbitrarias hay de $n-1$ elementos formados con 0's y 1's; es decir 2^{n-1} .

La idea básica de completar listas de $n-1$ elementos a listas de n elementos se aplica para completar, de forma única, matrices $m \times (n-1)$ a $m \times n$ añadiendo una columna cuyas entradas serán 0 o 1 de acuerdo con lo expuesto anteriormente. La respuesta es $2^{m \times (n-1)}$.

Podríamos interpretar que los dos casos anteriores son 1-dimensionales (el segundo serían varios simultáneamente) mientras que el tercer apartado es 2-dimensional (o n -dimensional). La idea parece ser completar matrices $(m-1) \times (n-1)$ añadiendo un "ángulo". Los elementos de este ángulo, excepto el vértice, están claramente determinados de modo único. Para el vértice, se pueden elegir dos vías: completar la fila o la columna, y lo que tiene de novedoso esta nueva situación es comprobar que el resultado no depende de la vía seguida, mediante un análisis de paridad. La respuesta es pues $2^{(m-1) \times (n-1)}$.

Solución 2.-

De la primera parte de la solución anterior se puede seguir que el número de listas de n números con la propiedad adecuada es justamente la mitad de las posibles, es decir $2^n/2$. Cuando consideramos dos filas, solo la mitad de ellas satisfacen la condición en la primera y, de éstas, sólo la mitad también la satisfacen en la segunda, de donde la solución será $2^{m \times n}/2^m$.

De todas estas matrices, sólo la mitad satisface la propiedad en la primera columna, y de éstas la mitad en la segunda, y de éstas ...

En la Solución 1, el paso a dos dimensiones no era una simple aplicación de los métodos de dimensión 1, pues había un determinado conflicto. Aquel conflicto se resolvía mediante un análisis de paridad que en la presente estrategia se traduciría en que si todas las filas tienen la propiedad y las $n-1$ primeras columnas la tienen, necesariamente la última también la tiene, con lo que la solución es: $(2^{m \times n}/2^m) \Big/ 2^{n-1}$, en lugar de $(2^{m \times n}/2^m) \Big/ 2^n$, como parecería indicar el proceso.

Podríamos dar una tercera solución consistente en fundir ambos métodos, a saber, analizando como se puede ampliar una línea de $n-1$ elementos con la propiedad a otra de n elementos: de las posibles ampliaciones, sólo la mitad tienen la propiedad; etc.

Solución 3.-

Similar en espíritu a esta solución que acabamos de esbozar, es esta tercera en la que partiendo de una lista mínima se analiza como se podría ampliar al siguiente tamaño manteniendo la propiedad. Por ejemplo,

partiendo de un único elemento (sólo existe una posibilidad, la lista 0) podemos pasar a la lista (1, 1) o a la lista (0, 0) (las únicas dos posibilidades para listas de 2 elementos). Si miramos la lista de 1 elemento “embebida” dentro de las de 2 elementos (añadir 0), en realidad sólo tenemos una lista nueva, que se obtiene “sumando” (1, 1), y si volvemos a “sumar” nos encontramos de nuevo con (0, 0). Parece como si (1, 1) fuese el elemento generador de las listas de 2 elementos.

Para pasar a las de tres elementos, embebemos las de 2 elementos añadiendo 0. Para obtener nuevas listas hemos de incluir un 1 en la posición final; pero esto obliga a modificar alguna de las posiciones anteriores, como pasaba antes, por ejemplo “sumando” (0, 1, 1). Todas las listas resultantes satisfacen la propiedad, son distintas entre sí y distintas de las que ya teníamos. ¿Hay alguna más? Por ejemplo ¿qué pasa si en vez de sumar (0, 1, 1) sumásemos (1, 0, 1)?

La respuesta a estos interrogantes encierra la esencia de la dependencia lineal, pues $(1, 0, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1)$: tendríamos el mismo número de nuevas listas, y las que se obtiene por un método se pueden obtener por el otro.

Siguiendo la pista de lo que vamos haciendo en cada etapa, embebiendo los generadores en la etapa siguiente, al final nos encontramos con que todas las listas de n elementos se pueden poner como “suma” de los generadores escogidos $(1, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1, 1)$. Estamos pues hablando del subespacio vectorial de $(\mathbb{Z}_2)^n$ generado por los vectores antes señalados. Para saber cuantos elementos tiene, sólo se necesita saber cual es su dimensión, es decir, cuántos de estos generadores son linealmente independientes, y la matriz $(n-1) \times n$ que se forma con ellos tiene rango $n-1$ (¡el menor que resulta de suprimir la columna n corresponde a una matriz triangular con 1’s en la diagonal!). Luego la solución es, una vez más, 2^{n-1} .

Para los demás casos sólo se necesita identificar los generadores del correspondiente espacio vectorial:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \text{ para el segundo, y } \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{array} \text{ para el tercero.}$$

A destacar que el paso a dos dimensiones ahora no plantea problema adicional, pues éste se absorbe en el método para contar las posibles cajas de 1’s, lo que no debe extrañar por el planteamiento más general realizado. Tampoco el análisis de la independencia de los generadores plantea dificultades especiales; llega con considerar las matrices como vectores de un determinado espacio.

En ningún caso defenderé el empleo de este método por evitar cometer errores, como parecía que sucedía con los anteriores. No se trata pues de métodos generales por ellos mismos, sino como medio para entender mejor su elaboración y sus aplicaciones.

Una vez planteadas estas posibles resoluciones para nuestro problema original, y de la discusión de las diferencias y semejanzas entre ellas, llega el momento de sacar provecho de los métodos para resolver otros problemas. Por ejemplo, ¿qué hay de específico en el 1 y en el 0? Nada en la primera solución, podría tratarse de cualquier par de símbolos, y nada en la segunda. Pero en la tercera, parece que deberíamos ceñirnos a números, pues necesitamos sumar. Pero en realidad, tampoco estamos sumando como es habitual, estamos sumando dentro de $\mathbb{Z}_2$. ¿Podríamos sumar en cualquier otro sitio? Aquí empieza el análisis del método, y sólo una comprensión del mismo puede conducir a una generalización que merezca la pena. Los números pueden ser reemplazados por los de cualquier segmento inicial de los naturales, y el proceso será aplicable cuando la suma con 1 alterne la paridad usual, lo que ocurre en $\mathbb{Z}_k$, siempre que k sea un número par. Pero atención, en este caso aparecen los divisores de cero, y la teoría de espacios vectoriales ha de ser substituida por los módulos sobre un anillo y los conceptos de dependencia e independencia adaptados.

La propuesta es el tratar esta generalización como la resolución de un problema más, puede que más de uno. Utilizar el proceso de la generalización, más que el resultado final, para mejor entender lo que trata de generalizar, en este caso los espacios vectoriales.

Parece que no puedo abstraerme a mi condición de docente universitario: mientras trataba con problemas sencillos les dedicaba tiempo y espacio; tan pronto como los conceptos empiezan a complicarse parece como si el tiempo se acelerase y todo empieza a sucederse a gran velocidad.

No quiero terminar sin aclarar que las soluciones 1 y 2 también pueden adaptarse a este nuevo problema, pero, al contrario que en la solución 3, no se trata de ninguna generalización, sólo de substituir un número por otro, aunque sea necesario también reflexionar sobre otras peculiaridades del número 2 de las que carecen otros, y que tienen que ven con la lógica clásica, o la dualidad: verdadero/falso.

Podría concluir reclamando que la abstracción y la generalización tienen un sitio en el proceso formativo de los titulados en matemáticas. Espero que no quede duda de que tipo de generalizaciones hablamos: hablamos de procesos y no de resultados; sólo se puede generalizar con provecho aquello que se entiende, y la generalización debe tender a ayudar a comprender lo concreto y sus interacciones con las demás cosas.