

ÁLGEBRA COMPUTACIONAL SIMBÓLICA "DE BOLSILLO": SUS IMPLICACIONES PARA EL FUTURO

Drs. Bert K. Waits y Franklin Demana

Profesores Eméritos de Matemáticas

The Ohio State University

Department of Mathematics

231 W. 18th Ave.

Columbus, Ohio 43210

USA

email: waitsb@math.ohio-state.edu

Patrocinio de Texas Instruments

Nunca antes se había impartido una enseñanza de las matemáticas con tanta calidad como en la época actual y, además, para *todos* los estudiantes, debido a la rápida expansión de ordenadores "de bolsillo" dotados con una tecnología poderosa (y barata) que les permite incorporar software de álgebra simbólica computerizada (AC). Las calculadoras científicas han cambiado *de forma significativa* el currículo de las matemáticas en la enseñanza secundaria en todo el mundo en los últimos 25 años. Por ejemplo, muchos temas que se trataban mediante operaciones con papel y lápiz y que tenían que ver con funciones trascendentales han sido eliminados. Lo sabemos porque nosotros mismos enseñábamos esos contenidos antes de que se inventara la calculadora científica y los podemos comparar con lo que enseñamos hoy en día. Estimamos que al menos una cuarta parte de los contenidos que se enseñaban habitualmente en los cursos de secundaria de trigonometría y funciones antes de 1972, sencillamente ya no se enseñan en la actualidad en cursos similares. ¡Muchas secciones e, incluso, algunos capítulos completos de los libros de texto relacionados con métodos empleados para realizar operaciones utilizando lápiz-y-papel se convirtieron en obsoletos y desaparecieron, sin más, del currículo! ¿Por qué? Porque las calculadoras científicas proporcionaron mejores maneras de "operar" que los métodos de lápiz-y-papel. **Lo mismo (obsolescencia) ocurrirá en breve plazo con las operaciones con lápiz-y-papel de álgebra simbólica debido a que los estudiantes están empezando a usar los baratos y manejables sistemas de AC que ya existen y que pronto proliferarán.**

Es importante advertir que, aunque *se gasta menos tiempo* en ciertos temas (aquellos que las calculadoras científicas han convertido en obsoletos), seguimos "funcionando" con las mismas cosas. Por ejemplo, seguimos calculando el seno de 14.25 grados, aunque no por el pesado método de calcularlo mediante interpolación lineal. NO hemos cambiado el "qué hacer" sino el "cómo hacer" lo que "hay que hacer". También es igualmente importante advertir que muchos educadores han encontrado diversas vías de cómo utilizar de una manera pedagógica las calculadoras científicas lo que ha ocasionado una mejora en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

En los últimos diez años, las calculadoras gráficas han hecho llegar el "poder de la visualización" a millones de estudiantes. Desde luego, se puede considerar que las calculadoras gráficas *son ordenadores* de bolsillo, pues utilizan CPU de ordenador tales como el Apple II Z80 y el Macintosh Motorola 68000. Es también un hecho que las calculadoras gráficas han probado ser una poderosa herramienta educativa en manos de profesores entrenados. Existen muchos cientos de ejemplos de su uso y efectividad (Waits y Demana, 1994; Dunham, 1992; Dunham y Dick, 1994).

Sin embargo, lo que hacen principalmente las calculadoras gráficas es *mejorar*, no reemplazar, lo que se conoce como "matemáticas tradicionales". Las calculadoras gráficas hacen posible y *prácticas* nuevas aproximaciones pedagógicas que facilitan la representación de problemas numérica y gráficamente, pero no simbólicamente (de forma exacta). La mayor parte de las calculadoras gráficas usadas en la actualidad *no* trabajan con símbolos como lo hace el software de álgebra simbólica computerizada que se encuentra en conocidos sistemas de álgebra computerizada (SAC) para PC como son DERIVE, MATHEMATICA y MAPLE.

Un sistema de álgebra computacional (SAC) abarca cuatro amplias áreas de funcionalidad.

1. Aritmética exacta (AE) racional, real y compleja.
2. Paquetes de software gráfico para representar funciones, relaciones y superficies 3D.

3. Analizadores numéricos

4. Álgebra simbólica computerizada (AC) para trabajar con (y resolver) expresiones algebraicas (ecuaciones).

La mayor parte de las calculadoras gráficas poseen únicamente dos de las cuatro principales componentes SAC. Las dos componentes principales de un SAC, aritmética exacta (AE) y álgebra simbólica computerizada (AC), no se encuentran en la mayor parte de las calculadoras gráficas actuales. La mayor parte de las calculadoras gráficas actuales usan lo que se llama operaciones en “coma flotante”. Obtienen solamente *aproximaciones* más o menos exactas de los números reales y de los números complejos. En los ejemplos que figuran a continuación se da una somera ilustración del uso de la AE y del AC. Utilizamos la nueva herramienta de bolsillo SAC TI-89 para nuestros ejemplos.

Ejemplos de Aritmética Exacta. Estos resultados no son posibles en “calculadoras gráficas” normales.

--	--	--

Ejemplos de Álgebra Simbólica Computerizada. Estas operaciones con símbolos no son posibles con las calculadoras gráficas típicas de hoy.

¡Hay que resaltar que estos ejemplos se pueden realizar con una única pulsación de una tecla en la TI-89! Esto es una ventaja pasmosa para el manejo por parte del estudiante. Los estudiantes demandarán el uso de AC debido a que proporciona una herramienta “mejor” para realizar las tediosas operaciones algebraicas normales que forman parte de las “matemáticas” actuales. Hacerlo de otra manera es un desperdicio del tiempo dedicado a la enseñanza y al aprendizaje. Tenemos maravillosos ejemplos de innovaciones en el currículo de las matemáticas que esbozan como enseñar “mejores matemáticas de la mejor manera”. Lo que se necesita es un tiempo de clase *adicional* dedicado a trabajar con el nuevo material y a resolver un nuevo tipo de problemas. También es necesario más tiempo en la clase para explorar otro software de ordenador como el de geometría dinámica CABRI. La geometría dinámica debería impregnar el currículo de matemáticas y ciencias en todos y cada uno de los cursos de la enseñanza secundaria. ¡El uso de AC de bolsillo, junto con el reconocimiento de que parte de lo que una

vez hicimos es ahora obsoleto, puede proporcionarnos el tiempo de clase suficiente para estudiar temas más interesantes!

Una Aproximación Equilibrada a la Reforma del Currículo. Antes de la llegada de la tecnología de bolsillo de tan fácil uso, estimamos que aproximadamente el 85% del currículo de las matemáticas consistía en operaciones con lápiz-y-papel. Las operaciones envolvían procedimientos algebraicos y analíticos incluyendo las manipulaciones simbólicas normales de álgebra y cálculo (por medio de lápiz-y-papel). Este tipo de operaciones, normalmente, tenían que ver con destrezas de pensamiento de muy bajo orden: "adquisición de automatismos". En el currículo previo a la tecnología de bolsillo, había muy pocos ejemplos de aplicación a la vida real y casi siempre ocurrían como consecuencia de conceptos matemáticos desarrollados algebraica y analíticamente. Más todavía, las demostraciones matemáticas que se hacían en los cursos normales eran o bien absolutamente elementales o bien, sencillamente, meras comprobaciones. Existe una evidencia cada vez mayor de que las operaciones utilizando únicamente lápiz-y-papel no llevan a un mejor entendimiento de los conceptos matemáticos. En efecto, el uso apropiado de la tecnología de bolsillo puede proporcionar más tiempo de clase para el desarrollo de una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al eliminar el tiempo empleado en adquirir automatismos de cálculo con "lápiz-y-papel".

Estamos convencidos de que la resolución de problemas y las demostraciones (o, al menos, dar argumentos convincentes) jugarán un papel cada vez más importante, mientras que las operaciones con lápiz-y-papel ocuparán menos espacio en un nuevo currículo equilibrado. No queremos sugerir que el tiempo empleado en estas funciones debería ser el mismo. Sin embargo, las operaciones *no deberían* llegar a ocupar el 85% del tiempo de clase como lo hacían en el pasado (y en el presente en la mayor parte de la educación secundaria).

Algunas de las destrezas adquiridas mediante la utilización de lápiz-y-papel continuarán siendo una parte importante del currículo. Sin embargo, el papel con las operaciones con lápiz-y-papel cambiarán dramáticamente en el futuro debido a la tecnología de bolsillo. Como indicamos anteriormente, AC proporciona una "mejor salida" para muchas operaciones. Debemos reconocer y explotar este hecho.

Creemos que las operaciones deberían hacerse de alguna de las tres maneras siguientes, tanto hoy como en el futuro. (Por operación entendemos aquellos procesos manipulativos asociados con aritmética, álgebra y cálculo realizados con lápiz-y-papel).

1. Cálculo mental
2. Operaciones con lápiz-y-papel
3. Operaciones realizadas con tecnología

Nuestro reto es decidir qué tipo de operaciones es adecuado en cada caso. Creemos que algunas operaciones deben ser resueltas mediante cálculo mental o con lápiz-y-papel en un curso (o parte de un curso), pero entonces deberían ser hechas mediante tecnología en cursos posteriores (o parte del curso). Esta técnica pedagógica se llama el principio de *la caja-blanca caja-negra*. Por ejemplo, la descomposición en fracciones parciales en cálculo es un procedimiento "caja-negra" que se puede hacer mejor con la tecnología AC. Pero la integración de funciones en un curso de introducción al cálculo es *al principio* un procedimiento caja-blanca (usando lápiz y papel). Esto es, nosotros permitimos el uso de algunos procedimientos algebraicos, no de análisis, AC "caja-negra", mientras que no permitiríamos ningún procedimiento de integración AC "caja-negra" (hasta que la habilidad o el concepto estuvieran adquiridos). Fue el Profesor Bruno Buchberger, del Research Institute for Symbolic Computation de Linz, Austria, el primero que introdujo el principio caja-blanca caja-negra. Este excelente enfoque didáctico AC es desarrollado con detalle, junto con otros buenos ejemplos, en el libro de Heugl, Klinger, and Lechner (Addison Wesley, 1996).

Consideremos el "ejercicio" de resolución de la integral definida que se muestra a continuación.

$$\int_0^{\pi/3} (x^2 \cdot \sin(x)) dx$$

$$= \frac{-\pi^2}{18} + \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{3} - 1$$

¡La TI-89 “realiza” la integral y presenta la respuesta exacta: $-\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 1$! Deberíamos alegrarnos

de disponer de una herramienta que es capaz de realizar las tediosas operaciones necesarias para llegar a ese resultado. Las operaciones con lápiz-y-papel para producir esta respuesta exacta no son importantes. *Lo que es importante* es hacer que el estudiante comprenda:

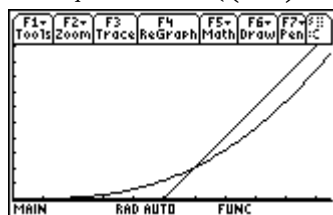
- El concepto de integral y su relación con la diferenciación
- Las técnicas con lápiz-y-papel para integrales sencillas
- Cuando y por qué hay que “integrar” (después de considerar el problema presentado)
- Si la respuesta obtenida por medios tecnológicos (o con lápiz-y-papel) es correcta

Mejor que pedir a los estudiantes que hagan las tediosas operaciones “lapiz-y-papel” (no aportan ningún conocimiento real) para encontrar la respuesta “exacta”, sería preferible realizar una serie de preguntas que ahora pueden ser contestadas [Finney, Demana, Waits y Kennedy, 1999]

A. ¿Cómo saber si la integral definida existe?

B. Describir un “problema” para el que la integral sea la “solución”.

C. *Estimar* la solución *sin* usar AC y comparar la estimación con la solución AC. Esta solución es sencilla y conlleva el uso de un ordenador o una calculadora gráfica en el intervalo $[0, \pi/3]$ por $[0, 1]$ junto con la observación de que el área es “aproximadamente” la misma que la que hay por debajo de la recta que se indica $((1/2) \text{ base} \times \text{altura} \approx (0.5)(0.5)(1) = 0.25)$.



$$\approx 0.265488$$

Para deducir que la respuesta AC *debe* ser cercana a 0.25 se requiere una comprensión real de los conceptos del análisis (no procedimientos manipulativos de orden inferior). Este ejemplo ilustra que la potencia educativa real del álgebra computacional radica en combinar su uso *con* lápiz y papel, *con* los gráficos (ordenadores/calculadoras gráficas), y *con* representaciones numéricas (ordenadores/calculadoras gráficas).

¿Qué se necesita en el futuro? Serán necesarios libros de texto desarrollados completamente con AC y eso llevará tiempo: en la actualidad esto solamente está empezando a hacerse con calculadoras gráficas. Habrá una tremenda necesidad de preparar y actualizar al profesorado. El cambio es difícil para todos nosotros. Es necesario reconocer que es más duro enseñar “comprendiendo” e, incluso, es todavía más duro valorar lo que eso significa. Es necesaria mucha investigación. Sin embargo, estas dificultades no deberían impedir posicionarse de una manera audaz y positiva ante el uso de AC en las matemáticas escolares. Algunos ven la “tecnología” como algo a evitar. Es necesario hacer ver claramente que la tecnología no es “matemáticas” sino que, simplemente, proporciona mejores herramientas para LLEVAR A CABO algunas manipulaciones matemáticas. ¿Qué son las matemáticas? La mayor parte de los que hoy son adultos es probable que aprendieran matemáticas en los últimos “gloriosos” días en que había que resolver los ejercicios con lápiz-y-papel. Su visión de las matemáticas es que las mismas son algo que gira alrededor de procedimientos a realizar, con toda destreza, utilizando lápiz-y-papel: cómo resolver, cómo factorizar, cómo simplificar, etc. Creemos que lo que se necesita tanto hoy como en el futuro es una escuela y una universidad donde el currículo de las matemáticas haga uso de la tecnología computacional para ayudar a los estudiantes a profundizar en la comprensión matemática, en llegar a ser poderosos e inteligentes “pensadores”, comunicadores y analizadores de problemas. Buscamos una *aproximación equilibrada* al uso de la tecnología. Algunos de nosotros realmente nos damos cuenta de la

comprensión tan profunda y rica de las matemáticas que es posible cuando la tecnología se usa de forma efectiva. El gran reto para nuestra comunidad es que nuestro “público” vea claro que unas matemáticas tan extraordinarias son, a la vez, posibles y deseables.

Referencias

1. Dunham, P. (1992). Teaching with Graphing Calculators: A Survey of Research on Graphing Technology. In L. Lum (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, 89-101. Reading, MA, Addison Wesley.
2. Dunham, P. H., & Dick, T. P. (1994). Research on graphing calculators. *Mathematics Teacher*, 87
3. Finney, R. L., Demana, F., Waits, B. K. and Kennedy, D. (1999). *Calculus: Graphical, Numerical, Algebraic*. Second Edition. Menlo Park, CA. Scott Foresman Addison Wesley Publishing Co.
4. Heugl, H., Klinger, W., & Lechner, J. (1996). *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen: Ein Didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt*. Bonn, Germany, Addison Wesley
5. Waits, B. K. & Demana, F. (1994). The Calculator and Computer Precalculus Project (C²PC): What have we learned in Ten Years? In G. W. Bright, H. C. Waxman, & S. E. Williams (Eds), *Impact of Calculators on Mathematics Instruction*. Lanham, Maryland, University Press of America.