

1. Matemáticas de ahora y enseñanza de las Matemáticas

TEORÍA DEL CAOS Y RENOVACIÓN MATEMÁTICA

Manuel Morán Cabre

(Depto. de Análisis Económico. Univ. Complutense de Madrid)

I. Algunos ejemplos.

Antes de entrar en consideraciones generales sobre las consecuencias filosóficas y matemáticas de la teoría del caos, empezamos con algunos ejemplos que servirán para ilustrar el tipo de problemas que estudia la teoría del caos y como pueden ser utilizados en el aula.

La teoría del caos nace del estudio de sistemas dinámicos, es decir, del estudio matemático del movimiento. La representación de este área en el actual curriculum de enseñanza media se limita a las progresiones aritméticas y geométricas, y aun así el enfoque más generalizado que se da a esos temas no es dinámico. A través de los siguientes ejemplos se puede ver la variedad de situaciones que se pueden estudiar con sistemas dinámicos, y como ello podría permitir un enfoque nuevo, basado en muchos casos en la experimentación gráfica y con ordenador, de nociones tan espinosas como las de sucesión, límite, punto de aglomeración etc.

a) Evolución de una población de mariposas en un ecosistema saturado. (Robert May, 1976).

El agotamiento de los medios de subsistencia en un ecosistema cerrado causa que la clásica ecuación

$$x_{k+1} = \alpha x_k$$

para el estudio de la evolución de una población sea poco realista en el caso en que la tasa de natalidad supere a la de mortalidad (caso en que $\alpha > 1$). El biólogo Robert May propuso la ecuación no lineal

$$x_{k+1} = \mu(1-x_k)x_k$$

que tiene en cuenta los efectos de saturación del ecosistema. Si

$$f(x) = \mu(1-x)x$$

podemos calcular la población x_{k+1} en el periodo $k+1$ mediante la ecuación

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Así pues, una representación gráfica de f permite el cómputo inmediato del tamaño de una población en función de la del periodo anterior. De hecho, si tenemos representado el gráfico de la función podemos saber con facilidad cual es el tamaño de la población x al cabo de k periodos, si sabe cual es su tamaño x_k en el periodo inicial, mediante el siguiente algoritmo gráfico.

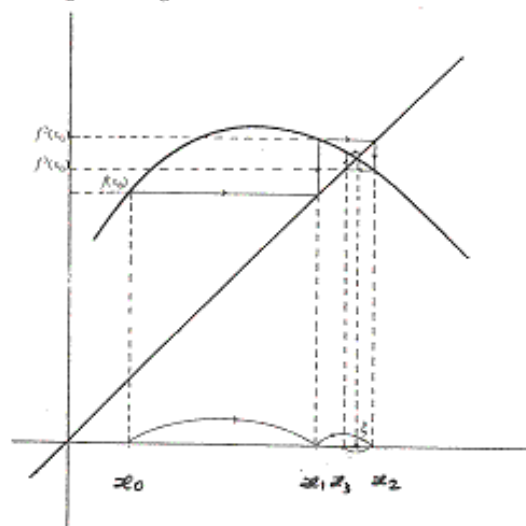


fig. 1

Una vez calculado x_1 podemos llevar este valor sobre el eje x para calcular x_2 y así sucesivamente. El mismo efecto se logra si en lugar de llevar los sucesivos valores sobre el eje x se utiliza la diagonal del primer cuadrante como se indica en la figura.

Este algoritmo gráfico nos permite encontrar de forma inmediata los **estados de equilibrio de la población**. Ensayando con diferentes valores del parámetro μ se puede descubrir con sencillos procedimientos gráficos que una gran variedad de conductas son posibles, desde convergencia asintótica hacia los estados de equilibrio, hasta convergencia asintótica a regímenes periodicos de órdenes 2, 4, 8... Para ciertos valores del parámetro μ , como por ejemplo, para $\mu = 4$, el sistema entra en **regimen caótico**: No hay convergencia hacia ningún estado de equilibrio ni hacia ningún ciclo

periódico; por el contrario el sistema evoluciona aparentemente sin ninguna pauta regular de conducta.

b) Cálculo de raíces cuadradas usando sistemas dinámicos.

Presentamos aquí una aplicación de la teoría del caos a un problema de cálculo que resulta muy adecuada para la experimentación en el aula.

La teoría del caos parte, como en el ejemplo anterior, del estudio de la evolución de **sistemas dinámicos** en que el estado x_{k+1} del sistema en un periodo se obtiene mediante la ecuación

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

donde f es cierta función, llamada la **ley de evolución del sistema**, que en general es no lineal. Los puntos de equilibrio se caracterizan por la ecuación $f(x) = x$. Un punto de equilibrio ξ se dice **globalmente atractivo** si para cualquier valor de x_0 se tiene $x_k \rightarrow \xi$. Si además se sabe que $f'(\xi) = 0$, entonces no sólo el sistema evoluciona hacia ξ a

$$f(x) = \frac{c}{2x} + \frac{x}{2}$$

partir de cualquier condición inicial, sino además lo hace de forma extraordinariamente rápida. Se dice entonces que ξ es un punto **superatractivo**. Como ejemplo de aplicación, considerar la función

definida en $\mathbb{R}^+$ y el sistema dinámico asociado, $x_{k+1} = f(x_k)$. Se comprueba inmediatamente que $\sqrt{c}$ es un punto fijo, que es globalmente atractivo. Además se tiene $f'(\sqrt{c}) = 0$, de forma que se trata de un punto superatractivo. Para calcular $\sqrt{c}$ basta tomar cualquier x_0 y entonces $x_k \rightarrow \sqrt{c}$. La convergencia es tan rápida que para obtener 36 cifras decimales de aproximación a $\sqrt{3}$ tomando $x_0 = 2$, bastan tan solo cinco iteraciones. Este ejemplo es ideal para el trabajo en el aula con calculadoras de mano. También puede ser programado muy fácilmente por computador. Con ideas análogas pueden fabricarse otros algoritmos para realizar iterativamente otros cálculos.

c) Solución iterativa de problemas geométricos.

Se tiene una curva convexa y cerrada C , y un triángulo T . ¿Es posible construir un triángulo con lados paralelos a los de T e inscrita en C ?

Este problema admite una formulación y solución dinámica, que da lugar a un bonito algoritmo gráfico. Para ello llamamos a, b, c , a los lados del triángulo T . El lado a define una aplicación $p_a: C \rightarrow C$ que a cada punto x de C hace corresponder la intersección de la recta paralela a a y que pasa por x con la curva C . Análogamente definimos p_b y p_c . La composición de las tres aplicaciones, $f = p_c \circ p_b \circ p_a$ define un sistema dinámico

$$x_{k+1} = f(x_k).$$

Supongamos que ξ es un punto fijo, es decir, tal que

$$\xi = f(\xi) = p_c \circ p_b \circ p_a(\xi)$$

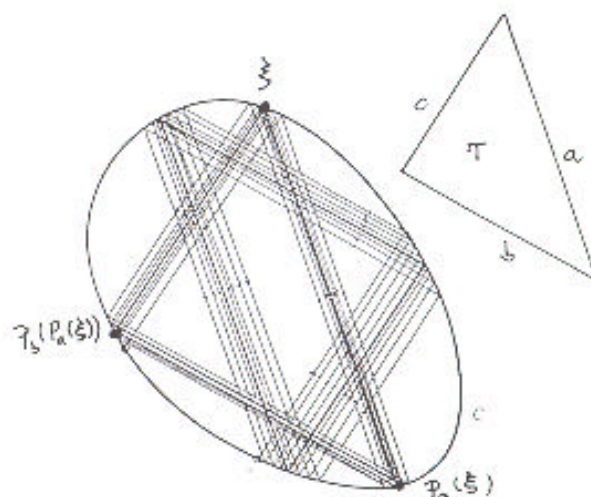


Fig. 2

Las rectas que unen x con $p(\xi)$, $p_a(\xi)$ con $p_b(p_a(\xi))$ y $p_b(p_a(\xi))$ con ξ son paralelas a los lados de T y cierran un triángulo, luego son solución del problema. Puede probarse por medios elementales que el problema admite dos soluciones exactamente. Para buscar gráficamente estas soluciones se toma un punto arbitrario x_0 y se construye la órbita $x_1, x_2, x_3, \dots$. Considerando $g = f^{-1}$ y su sistema dinámico asociado $x_{k+1} = g(x_k)$ se puede obtener la otra solución.

II. Algunas consecuencias de la teoría del caos.

1. Determinismo versus aleatoriedad.

En el ejemplo a) de la primera parte hemos visto que para ciertos valores del parámetro μ la población de mariposas evoluciona de forma caótica, sin pauta aparente. Supongamos que registramos unos datos $x_0, x_1, x_2, \dots$ generados mediante el algoritmo

$x_{k+1} = f(x_k)$, con $f = 4(1-x)x$. ¿Cómo saber que se trata de una serie generada mediante un mecanismo determinista, y no de una serie puramente aleatoria?. Si se supone que podemos medir datos con infinita precisión, existen procedimientos para descubrir la ley determinista. Pero sabemos que en la práctica sólo se puede medir con una precisión finita, digamos de m dígitos binarios. Por el carácter caótico del sistema dinámico que estudiamos, la indeterminación acerca de la posición de x_k crece en un dígito binario con cada nueva iteración, de manera que al cabo de m iteraciones hemos perdido completamente toda información acerca de la posible conducta del sistema. En estas condiciones la ley determinista $x_{k+1} = f(x_k)$ se comporta de forma completamente aleatoria si se observa al cabo de m unidades de tiempo.

Recíprocamente, consideremos el proceso estocástico correspondiente a tiradas repetidas de una moneda equilibrada. El espacio muestral Ω de este proceso es el de todas las sucesiones de ceros y unos. En este espacio muestral existe definida la aplicación *paso del tiempo*

$T: \Omega \rightarrow \Omega$ que a cada sucesión $\mathbf{a} = a_1 a_2 a_3 \dots$, $a_i \in \{0,1\}$, hace corresponder la sucesión $T(\mathbf{a}) = a_2 a_3 a_4 \dots$. El sistema dinámico $x_{k+1} = T(x_k)$ en Ω es *equivalente* al sistema dinámico

$x_{k+1} = f(x_k)$ en $[0,1]$ (en un sentido que puede hacerse matemáticamente preciso; la idea se basa en representar Ω en el intervalo unidad interpretando las sucesiones de ceros y unos como expresiones binarias de números reales). Si se conocen los m primeros dígitos de x_0 , al cabo de m iteraciones habremos perdido toda la información inicial, y no tendremos ninguna información acerca de la conducta del sistema, como ocurría arriba. Si conocemos todas las cifras de x_0 , entonces conoceremos exactamente x_k para cualquier k , y el sistema es perfectamente determinista. Mientras que el sistema de May $x_{k+1} = f(x_k)$ era tradicionalmente considerado como determinista, el proceso estocástico de tiradas repetidas de una moneda equilibrada es el ejemplo más clásico de un proceso aleatorio. La equivalencia de ambos, puesta de manifiesto por la teoría del caos, hace tambalear los conceptos tradicionales de determinismo y aleatoriedad.

2. Las matemáticas ¿Una ciencia experimental?.

Los sistemas caóticos son intrínsecamente aleatorios.

Su conducta no puede ser prevista, aun cuando se conozca su ley de evolución. ¿Como estudiar estos sistemas?. La **teoría ergódica**, muestra que podemos aprender de los sistemas dinámicos a partir de su observación, lo que establece una conexión clara entre las matemáticas y otras ciencias experimentales, particularmente la física.

La teoría del caos es de hecho un área compartida por físicos y matemáticos, y en ella la investigación empírica, mediante el uso del ordenador, ha jugado un papel clave. El análisis clásico de sistemas dinámicos buscaba la obtención de expresiones analíticas de la función f^k de un sistema, que permite, dada la condición inicial x_0 del mismo, la obtención de su estado al cabo de k unidades temporales $x_k = f^k(x_0) = f \circ f \circ \dots \circ f(x_0)$. Pero esta tarea es en general imposible si f es no lineal.

Sin embargo la aparición del ordenador hace posible de forma sencilla el cálculo iterativo de $f^k(x_0)$. De la observación de una sola **órbita** $x_1, x_2, x_3, \dots$, puede en muchos casos deducirse propiedades genéricas de las órbitas del sistema. Ello ha proporcionado un impulso definitivo al estudio de los sistemas dinámicos no lineales, que es de hecho lo que ha originado el nacimiento de la teoría del caos. La investigación actual en este área incorpora la experimentación como fuente de conocimiento. Las matemáticas pasan de ser una ciencia deductiva a incorporar sistemáticamente mecanismos inductivos para la formulación de conjeturas. No sólo esto, sino que además la experimentación en matemáticas resulta ser incluso más accesible que en otras ciencias, al basarse en tecnología electrónica y no mecánica o química, como en el caso de la física y de las ciencias de la naturaleza.