

2. Concepciones epistemológicas de las Matemáticas y de su enseñanza

MODAS Y CREENCIAS EN EPISTEMOLOGÍA MATEMÁTICA. SU RELEVANCIA PARA LA DIDÁCTICA

Camino Cañón

Universidad Pontificia de Comillas, Madrid

XXXIX.-"He creído deber **mío distinguir esos ídolos que obsesionan la inteligencia humana aplicándoles estas cuatro denominaciones (con el fin de que se comprendan mejor): ídolos de raza (prejuicios de la especie), ídolos de antro (prejuicios del individuo), ídolos del foro (prejuicios del lenguaje), e ídolos del teatro (prejuicios filosóficos)" (F. BACON, Novum Organum,16)".**

He querido empezar con esta cita de BACON, para poner de manifiesto con lenguaje clásico algo de lo que vamos a desarrollar en esta exposición, si bien aquí nos centraremos en los dos últimos: los prejuicios del lenguaje y los filosóficos.

Cada generación, según el contexto socio-histórico que le toca vivir, y en nuestro caso, cada generación de matemáticos usa determinadas palabras con prejuicios: las palabra 'conjunto', 'categoría', hace algunos años; expresiones como 'la certeza matemática', 'demostración deductiva',..., hoy. Dejando a un lado las historias personales que hayan podido llevar a esos prejuicios, se dan determinados fenómenos sociales en las comunidades matemáticas que hacen que haya modas, tanto en aceptar y valorar, como en cuestionar y rechazar. Y si bien los fenómenos de la moda tienen que ver con el éxito de algunos conceptos, estructuras o sistemas, también incluye otro factor menos evidente que se corresponde con los Ídolos del Teatro, y que aquí vamos a tratar como creencias en torno a la matemática, a los objetos de los que trata y al conocimiento matemático en cuanto tal.

No hay mucho que argumentar para evidenciar que las modas generadas por los Ídolos, constituyen factores relevantes para las concepciones didácticas y para el trabajo del profesor de matemáticas en el aula. Tampoco, espero, necesita muchas razones el poner de manifiesto cómo las creencias básicas del profesor, que no son ajenas a las que reinan en su contexto,

condicionan su propio quehacer. El propio texto del BOE sobre la ESO en Matemáticas, en su introducción dice lo siguiente:

"Las Matemáticas deben mucho de su prestigio académico y social al doble carácter que **se les atribuye** de ser una ciencia exacta y deductiva. La cualidad de la exactitud sin embargo, representa sólo una cara de la moneda, (...) De modo semejante, la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración..."

En lo que sigue, veremos en primer lugar, el sentido en el que aquí hablamos de creencias, para pasar después a exponer de qué manera en el transcurso del tiempo desde Grecia hasta nuestro presente se han configurado esas creencias, se han cuestionado, se han abandonado y recreado otras nuevas. Por último nos preguntaremos ¿cuáles son hoy nuestras creencias?, las que están de moda, y las que a cada cual en el aula con la puerta cerrada de hecho le acompañan.

IDEAS Y CREENCIAS EN EL SENTIDO DE ORTEGA

"La creencia es -dice Ortega- certidumbre en que nos encontramos, sin saber cómo ni por dónde hemos entrado en ella."¹

"No llegamos a ellas tras una faena del entendimiento, sino que operan ya en nuestro fondo cuando nos ponemos a pensar sobre algo" (Ibidem). En la literatura reciente sobre el aprendizaje de la matemática, las investigaciones sobre la influencia de las creencias ocupan un lugar destacado.² Douglas³ B. McLEOD, en un

¹ . ¹ J. ORTEGA Y GASSET, Ideas y creencias, Editorial Nacional, 8ª Edición, p. 17

2 . ¹Ver p.e. el artículo síntesis de Alba G.

estudio sobre la influencia de los afectos -emociones, actitudes y creencias- en la educación matemática,⁴ diferencia cuatro ejes en relación a las creencias: creencias sobre las matemáticas, sobre uno mismo, sobre la enseñanza de la matemática y sobre el contexto social al que pertenecen los alumnos. Aquí nos ocuparemos de las creencias del profesor respecto de las Matemáticas. dice a este respecto HERSH⁵:

"Las propias convicciones de lo que es la Matemática afectan a la propia convicción de cómo debería ser presentado. La propia manera de presentarlo es una indicación de lo que uno cree que es lo más esencial en ello... La cuestión entonces no es '¿cuál es el mejor modo de enseñar?', sino '¿de qué tratan realmente las Matemáticas?'"

Existen en la literatura tipologías diversas en relación a las creencias respecto de la Matemática; recordemos a título de ejemplo la que ofrece ERNEST (1988):

1.- Visión dinámica de la Matemática, como un campo de creación humana en continua expansión, en el cual se generan modelos y procedimientos que son destilados como conocimientos. La Matemática es algo abierto y sus resultados permanecen abiertos a revisión (perspectiva de resolución de problemas)

2.- Visión de la Matemática como cuerpo estático y unificado de conocimiento. La Matemática entonces sólo se descubre, no se crea (visiones platonistas).

3.- Visión de la Matemática como una caja de herramientas. La Matemática se hace acumulativamente en la medida en que hay objetivos externos a ella que puede ayudar a lograr (visión utilitarista).

Thompson que hace una presentación detallada de las investigaciones efectuadas para estudiar con precisión la influencia de las creencias sostenidas por el profesor en su modo de enseñar, recoge también una síntesis de uno de sus propios trabajos y afirma:

"A pesar de que la complejidad de la relación entre concepciones y prácticas desafía la simplicidad de

la relación causa-efecto, mucho del contraste existente entre la diversidad de énfasis puesto por distintos profesores puede ser explicado por su visión predominante respecto de la Matemática"⁶

Así podemos decir que :

*un instrumentalista enseña de manera prescriptiva enfatizando reglas y procedimientos.

*un platonista enseña enfatizando el significado matemático de los conceptos y la lógica de los procedimientos matemáticos.

* un matemático que esté en la línea de resolución de problemas, enfatizará actividades que conduzcan a interesar a los estudiantes en procesos generativos de la matemática.

No se trata -al menos no es esa mi propuesta-, de encasillar nuestras creencias en una tipología, que como cualquier otra deja fuera muchos matices y reduce a perfiles homogéneos aportaciones singulares y valiosas. Pero sí es importante caer en la cuenta de que nuestros modos de trabajo en el aula tienen fundamentalmente que ver con nuestras creencias. o dicho de otro modo, lo que nuestros profesores, también los de universidad, nos enseñaron y su modo de hacerlo, es inseparable de su propia concepción, de la que quizás algunos de nosotros hayamos tomado distancia, al modo como hemos tomado distancia de otras creencias "en las que nacimos" como diría Ortega, y que la vida y el conocimiento nos han hecho explicitar y luego abandonar o en otros casos corroborar.

Lo que sigue se orienta a ofrecer una panorámica sintética de cómo se gestaron las creencias más arraigadas en torno a la Matemática, y cuáles han sido las vicisitudes a través de las cuales esas creencias han entrado en crisis en nuestra época de pensamiento postmoderno, en que no sólo se abandonan los grandes relatos, sino las certezas.

LA GESTACION DE LAS CREENCIAS

Uno de los puntos controvertidos entre los filósofos que se ocupan de la Matemática, está el llamado la cuestión del origen. ¿Nacieron las Matemáticas en Grecia y lo hecho anteriormente por las civilizaciones antiguas era una actividad empírica que preparó el terreno, pero que no merece la misma consideración que el producto racional logrado por los pitagóricos? Kant sería de este parecer. O bien, tenemos que pensar que entre los dos momentos hay sólo una diferencia importante, pero no un corte. Esta segunda posición sería la sostenida por las corrientes empiristas. Sea la que sea la representación del origen que adoptemos,

THOMPSON, de la Universidad de San Diego . Cfr. o.c. pp127-145

3.cfr. 1986, p. 13

4. cfr. o.c. pp 575-596

5. cfr. 1986, p.13

6. o.c., p. 119 . el artículo-síntesis mencionado está en las págs. 132ss.

hay un hecho en nuestra civilización occidental que es el que ahora nos importa: hacer objeto del filosofar ese dominio del conocimiento que se denominó Matemáticas, es obra de los griegos. A ellos debemos pues la gestación de las "buenas razones" con que trataron de dar cuenta de esa realidad sorprendente que eran las matemáticas.

Dice Piaget, que hay razones psicológicas que dan cuenta del hecho de que sea posible utilizar durante mucho tiempo las operaciones lógico-matemáticas sin tomar conciencia de su existencia como operaciones. Esto explica que "las matemáticas griegas nacieran esencialmente **realistas** (o, como ha dicho Pierre Boutroux, 'contemplativas'); es decir, proyectaron en lo real los resultados de las operaciones, en lugar de reflexionar sobre éstas y manipularlas en su calidad de instrumentos móviles y libres de transformación y combinación.(...) Por eso también, es indudable que la primera de las teorías epistemológicas, que consistió en reflexiones de Pitágoras acerca de la naturaleza de los números, demostró ser cabalmente realista: de acuerdo con ese gran matemático, los números enteros constituyen los elementos de los objetos y de las figuras, como si de algún modo se tratara de átomos espaciales, y ello sin la menor sospecha de que tales números pudieran resultar de actividades, de operaciones o de acciones propiamente dichas del sujeto mismo. Para el realismo, pues, el sujeto cognoscente no interviene en el conocimiento: todavía no existe como sujeto activo, y se limita a **contemplar**." ⁷

En esta explicación de Piaget se pone de manifiesto hasta qué punto lo que las matemáticas sean pasa a ser integrado dentro del acervo de creencias de una cultura, y en ella según las pautas de la creencia se articularán razones para comprender mejor la plausibilidad de esa creencia.

El realismo griego articula de modos diversos -especialmente los pitagóricos, Platón y el propio Aristóteles- eso que algunos autores llaman realismo preteorético⁸:

Si los hechos matemáticos son hechos, deben serlo acerca de algo; si las verdades matemáticas son verdad, algo debe hacerlas verdad. Por eso, las matemáticas se presentan primariamente como un conocimiento acerca de unos entes, cuya naturaleza habrá de ser muy especial para que el saber acerca de ellos se constituya en theoremas, en contemplación, en theoria.

⁷ . J. PIAGET, *Naturaleza y Métodos de la Epistemología*, Ed. proteo, Buenos Aires, 1970, p. 27

⁸ . P. MADDY, 1990 p.1

No es este el lugar para hacer una presentación de la filosofía de Platón, pero me atreveré a esbozar algunos elementos que permitan situar alguna de las formas más arraigadas de las creencias en Matemáticas, aquellas que se suele decir, el matemático posee en su más celosa intimidad cuando trabaja, y de las que reniega en las charlas de café con los colegas. Nos hacemos las preguntas siguientes:

- 1.- Qué entiende Platón por conocimiento matemático
- 2.- Cómo concibe el acceso a él
- 3.- Qué finalidades le asigna

1.- Qué entiende Platón por conocimiento matemático

En el célebre pasaje de la recta (Rep. 507d-511e), distingue Platón entre doxa y episteme, a la que a su vez divide en **dianoia** conocimiento propio de la Matemática, y **noesis**, propio de la Filosofía. La **episteme** está orientada "hacia los seres que no nacen ni mueren, antes son eternamente idénticos e inmutables"(Filebo 59b-d).

El mundo sensible lo crea el Demiurgo como una copia del modelo matemático (Paradigma), haciendo también que el tiempo se rija por las leyes de los números."Los razonamientos tienen un cierto parentesco con los mismos objetos que explican"(Timeo 29b). Los razonamientos que se refieren al Paradigma (dianoia) "se refieren a lo que permanece, a lo que es fijo y traslúcido para el entendimiento" así pues deberán ser "fijos e indemostrables, y en la medida en que es posible en los razonamientos del ser, deben ser irrefutables e irrefutables" (ibidem, 29b-c)

Los razonamientos que se refieren a la copia del modelo, es decir, los que se refieren al mundo sensible y se basan en observaciones de los sentidos, conducen a resultados que están lejos de conllevar certeza, son sólo verosímiles:"no somos más que hombres, de manera que en esas materias nos basta aceptar una narración verosímil y no debemos buscar más"(Ibidem, 29d)

2.-Cómo concibe el acceso a él

El camino de acceso al conocimiento matemático es la reminiscencia (*Fedón* 74b-d) conducida por el arte de la mayéutica. El célebre pasaje del *Menón*, 81e-86c, en que el esclavo conducido por las preguntas de Sócrates, bajo la única condición de entender el griego, llega a probar que la diagonal del cuadrado de lado 2pies es inconmensurable con la longitud del lado.

El lenguaje es un medio cuya relevancia Platón matiza en diversos pasajes. En este del *Menon*, lo muestra como vehículo necesario para acceder al conocimiento matemático, pero el lenguaje es a

menudo un camino engañoso (*República* vii; 527a-b) porque hablamos de acciones como 'cortar', 'añadir',... que realizamos sobre las imágenes empíricas de los objetos matemáticos; los objetos son realidades de otro mundo y a ellos no se les aplica sino metafóricamente ese lenguaje. Por otra parte, el lenguaje proporciona elementos convencionales, imprescindibles para llegar al conocimiento (*carta* vii 342d)

3.- Qué finalidades le asigna

La finalidad primera del conocimiento es la contemplación del Ser, por eso la matemática le será indispensable al guerrero, no sólo "para entender algo de cómo debe ordenar el ejército", sino "si quiere ser hombre" (cfr. *República* vii; 524a).

Para conocer el mundo por otra parte, el conocimiento del Paradigma que eligió el Demiurgo para crearlo, es el único camino seguro, los demás solo son aproximaciones verosímiles. Esta convicción de Platón fue fuertemente criticada por Aristóteles que veía en ella una negación del camino de la ciencia natural.

Para los usos de la vida corriente Platón considera que lo que se aplica no es la ciencia matemática, sino un saber que no le merece otra calificación más que 'matemática del vulgo' (*Filebo* 56c).

Hasta aquí y de manera somera esta aproximación a la visión que Platón transmite acerca de las Matemáticas, y que va a marcar decisivamente toda la reflexión que se haga sobre el tema. Como decía Piaget en el texto citado, la matemática es realista: hay unos objetos a los que accedemos contemplativamente por el camino de la reminiscencia que requiere el apoyo de lenguajes diversos y a veces equívocos, y cuyas relaciones y propiedades aparecen expresadas en proposiciones cuyo carácter no puede ser otro que necesario y universal: nada empírico puede refutarlas, su verdad al referirse a entes que existen siempre y permanecen, está más allá de los sujetos que las piensan y de las culturas que las reconocen. Esta herencia está incrustada en el núcleo mismo de las creencias de nuestra civilización occidental y una buena parte de la historia de las ideas en torno al conocimiento matemático puede articularse en cómo se ha asumido o rechazado esta creencia. Pasamos a decir algo de ello en lo que sigue.

LA CREENCIA EN LA MODERNIDAD

El giro copernicano que supone la modernidad para la epistemología sitúa al sujeto en el centro de la actividad del conocer; cuáles sean sus relaciones con el objeto conocido, si lo descubre o lo crea, si lo construye o lo reduce a otros objetos más básicos o al lenguaje mismo, serán variantes que

se dan según los autores que piensan sobre el tema. Pero esta aproximación común está hecha desde un referente también común: la convicción, la creencia de que el conocimiento matemático es un conocimiento cualitativamente distinto de los demás tipos de conocimiento. El mismo empirismo en sus etapas iniciales reservará para el conocimiento matemático un lugar difícilmente aislable del terreno de lo cierto.

Al igual que las demás cuestiones objeto del filosofar en esta etapa, también la matemática fue tratada de distinto modo por las dos grandes corrientes racionalista y empirista en los siglos XVII y XVIII. Y también Kant, al igual que sucede con otras grandes cuestiones aportará un avance de síntesis que posibilitará suelo filosófico a los intuicionismos y constructivismos derivados de aquél, ya en nuestro siglo. Presentaré en primer lugar, algunas ideas de Leibniz en relación con Descartes y otras que expresan su relación y distancia con el empirismo, en particular con Locke.

Leibniz construye sobre la herencia de Descartes, tanto en matemáticas como en Filosofía. Es contemporáneo de Newton y creador/descubridor del Cálculo Infinitesimal independientemente de él, que Voltaire caracterizará casi un siglo después como "el arte de nombrar y medir exactamente una cosa cuya existencia no puede ser concebida".

Con Descartes comparte la creencia en el carácter cierto del conocimiento matemático y el innatismo de las ideas matemáticas. Sin embargo, se distancia significativamente de él en la fundamentación del propio quehacer y en particular en su concepción del infinito. Lo claro y distinto cartesiano deja paso ahora a la creencia en el orden de algo que se presenta oscuro pero continuo: la claridad de una idea es independiente de la existencia de una imagen de la misma. También la concepción estática cartesiana deja paso a una concepción dinámica posibilitada por el principio de continuidad, que "permite considerar el reposo como un movimiento infinitamente pequeño (es decir como equivalente a una especie de su contradictorio), y la coincidencia como una distancia infinitamente pequeña, y la igualdad como la última de las desigualdades, etc" (Carta a Varignon, 22-1702). El infinito es así el rey y el origen del dinamismo matemático regido inicialmente por dos principios metafísicos: continuidad y orden que el trabajo tenaz de generaciones de matemáticos han conseguido domesticar - al menos en parte!-

Pero si el quehacer matemático lleva a Leibniz a trabajar con ideas no claras y distintas, no le lleva sin embargo a abdicar del carácter necesario y universal de las proposiciones matemáticas: analíticas, eso sí, en la mente de Dios, y solo virtualmente analíticas en cuanto producto

histórico. En cuanto tales, en cuanto productos del quehacer racional humano históricos y perfectibles, pero su carácter de verdades de razón y no de hecho, con fundamento en las ideas innatas, independiente por tanto de nuestros sentidos, las hace ciertas.

El empirismo también diferenciaba dos tipos de verdades, las matemáticas correspondientes a relaciones de ideas, y las correspondientes a relaciones de hechos. En las dos intervenían los sentidos, y por ende la certeza no quedaba asegurada en ningún caso. No obstante hasta Mill a mitad del XIX, no hay una articulación crítica que sitúe netamente el conocimiento de la Matemática en la misma arena que el conocimiento de las ciencias naturales.

Como hemos dicho anteriormente, es Kant quien se ocupa de ofrecer una aportación de síntesis que supera estas visiones y que mantiene la validez de la vieja creencia griega en la certeza del conocimiento matemático y en el carácter necesario y universal de sus proposiciones. La conocida propuesta de Kant de considerar los juicios matemáticos como 'sintéticos a priori', proporciona un nuevo referente para quienes después de él se han ocupado de revisar críticamente las creencias de que venimos hablando. La Matemática resplandece como obra de la razón que vuela por sus dominios como una paloma por un aire sin rozamiento alguno.

El empirismo inglés reaccionará ante Kant, como había reaccionado anteriormente ante Descartes. Joh Stuart Mill se echa a sus espaldas la ardua tarea de mostrar que no hay tal cosa como el llamado conocimiento cierto, y que el apriorismo kantiano resulta ser una justificación más, a la que no le resulta suficiente la actividad psichistórica del sujeto que conoce y produce conocimientos.

Para Mill no hay proposiciones necesarias. La necesidad es una creencia basada en el hábito que se ha ido generando a través de generaciones y asentando así verdades de observación construidas con la ayuda del principio de asociación. De ver un balón y un globo y la luna llena, hemos ido aprendiendo a ver un objeto al que hemos denominado esfera. La evidencia de los postulados y definiciones se reduce a esta "evidencia heredada", y el método deductivo que constituye un salto cualitativo en el modo de hacer ciencia, está asentado sobre una "inferencia aparente", pues no otra cosa es la deducción, ya que el estatuto de inferencia le corresponde únicamente a la inducción. La deducción no es otra cosa que un proceso de inferencia inductiva abreviada. Esta revisión de la creencia está presente hoy en muchos autores, y en particular en los que preconizan la 'pérdida de la certeza'.

PUNTO DE INFLEXION Y POSTMODERNIDAD

El punto de inflexión en las creencias lo constituye la revolución epistemológica producida por la aparición de las geometrías no euclídeas. La reacción en los medios matemáticos fue unánime: encontraremos una roca firme que asegure de una vez por todas que la aritmética es el reducto de la creencia que sostiene el carácter necesario y universal de las proposiciones y la certeza de su conocimiento. Logicismo, formalismo e intuicionismo fueron tres empresas ingentes sostenidas por hombros de gigantes. Los subproductos que aportaron no sólo a la matemática, sino a la Filosofía fueron de extraordinario valor, pero la roca firme no estaba bajo las arenas movedizas de las paradojas.

"Nosotros no conocemos, solo conjeturamos", es una célebre frase de Lakatos cuya significación se inscribe en ese gozne con las escuelas de búsqueda de fundamentos y con la nueva trayectoria iniciada por Popper de dejar atrás la pregunta por las condiciones de posibilidad del conocimiento, para hacerse la pregunta por el cómo del avance de la ciencia. La obra de Lakatos marca el despegue de otro horizonte en la filosofía actual de la matemática en que la creencia heredada se ha transformado en perplejidad y la convicción de que no cabe la certeza ha ocupado en muchos el lugar de la vieja creencia.

La literatura de los años ochenta ha ofrecido títulos y estudios sobre los modelos de avance de la ciencia que más cuadran a una interpretación de la Historia de la matemática que tenga en cuenta el carácter acumulativo de sus resultados. Wilder ofrece un modelo evolutivo regido por veintitrés leyes, Kitcher por su parte, inspirándose en el modelo revolucionario kuhniano toma de él el avance por paradigmas, rechazando la inconmensurabilidad de las etapas, Lakatos ofrece el modelo de zig-zag, de pruebas y refutaciones para la etapa de génesis de las teorías.

Todos ellos, revelan una posición distante respecto de la creencia heredada, siendo quizás Wilder el que más cabida da a la dimensión de sociología de la ciencia, y consiguientemente a la entrada de una posición relativista en lo que había sido el reducto de la certeza del conocimiento.

Por mi parte, no quiero renunciar ni a la dimensión histórica del quehacer, ni a la consideración de necesidad formal propia de los resultados de teorías maduras. No es este el lugar para exponer con detalle mi punto de vista. Baste decir que hay elementos complejos en la creencia heredada que necesitan revisión, pero que hay dimensiones de la no arbitrariedad del conocimiento matemático para cuyo abando no encuentro razones, y me ha parecido en cambio haberlas encontrado para sus sostenimiento⁹.

9. He expuesto estas ideas en la última parte de mi

Queremos terminar estas páginas recogiendo algunas de las preguntas que hoy no podemos ahorrarnos y que son relevantes para el quehacer didáctico en el aula. Son las preguntas acerca de nuestras creencias por el **rigor**, por el carácter de las **demonstraciones**, de las **definiciones**, por el papel que otorgamos a la **utilidad** y a la **armonía** como factores de validación de un resultado. Son cuestiones cuya respuesta condicionará el modo de hacer, el modo concreto de enseñar, y sobre ellas podemos dialogar.