

¿ PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS ? ¿ PARA QUÉ ?

Antoni Vila Corts

I.B. Gabriel Ferrater. Reus. Tarragona

1.- Introducción

La trascendencia del papel de la resolución de problemas (RP) en la educación matemática ha sido recogida y analizada ampliamente en la mayoría de los grandes Proyectos Curriculares e Informes de los últimos 20 años.

Sin embargo, cabe preguntarse hasta qué punto y desde qué perspectiva el profesorado concibe esta trascendencia en el papel de la RP. Por supuesto debemos reconocer que en el lenguaje habitual en el aula se habla más a menudo de «*obtener la solución del problema*» que de «*enfrentarse a él*», se habla más a menudo de «*organizar los datos del enunciado*» que de «*analizar la situación planteada*», de «*comprobar el resultado*» que de «*explorar situaciones parecidas o más generales*», etc.,

En la medida en la que estos tópicos del lenguaje respondan a creencias arraigadas en el profesorado, es razonable pensar que los problemas no pasan de ser *ilustraciones* de los conocimientos matemáticos y que la RP es importante solo en la medida en la cual «se pone al servicio de éstos» y no al revés.

Esta hipótesis es la que se plantea en un estudio (Vila, 1995), del cual son aquí presentadas las conclusiones, sobre algunas concepciones entorno a la idea de *problema* y a su finalidad en la educación matemática.

2. - Algunas creencias de los profesores entorno a la finalidad de la Resolución de Problemas en la Educación Matemática

Actualmente no se pone en duda la gran influencia que sobre la práctica de la educación matemática tiene el *sistema de creencias* de los profesores entorno a las propias matemáticas y a su enseñanza/aprendizaje (A.G.Thompson, 1984). En particular Kush y Ball (1986) identifican 4 visiones de «como deben ser enseñadas las matemáticas»: la que pone el centro de atención en la *construcción del conocimiento matemático* por parte del propio «aprendiz», la que lo pone en la *conceptualización de los contenidos*, en la *ejecución* de estos contenidos, o bien en «la clase» primando *aspectos afectivos*.

Desde esta perspectiva intentaremos dibujar unos *ejes de referencia* donde encuadrar las distintas visiones entorno a la idea de *problema* y a su papel en la educación matemática, que nos permitan representar/identificar un rango suficientemente amplio de *sistemas de creencias*.

En uno de estos *ejes* situaremos aquellas visiones que dan a los problemas escolares un **papel subsidiario a los contenidos matemáticos**. Aquí encuadraremos tanto aquellas visiones *instrumentalistas* de las matemáticas (A.G.Thompson, 1984), como aquellas que reducen el papel de los problemas al de «*herramientas que permiten aplicar los conocimientos matemáticos*», entendiendo que esta *aplicación* no deja de poner el énfasis en los conocimientos y por lo tanto no es más que una *ilustración* de éstos. Estas visiones suelen entender el aprendizaje desde la tradición *conductista* (imitación de conductas, reproducción del saber,...), apareciendo íntimamente asociadas a un modelo observable de trabajo con problemas en el aula, aquel que definiremos como «**reducción de los problemas a no-problemas**».

En el otro *eje* situaremos aquellas visiones que entienden el problema como una herramienta didáctica para «**favorecer el pensamiento matemático del alumno**», entendiendo el término *pensamiento matemático* como lo describen Schoenfeld (1991) o, desde otras ópticas, Douady (1986) o Mason (1988). Un aspecto observable que caracteriza estas visiones es el de que los problemas son tratados en el aula a la vez «*como objeto y como instrumento de estudio*».

Bajo este marco de referencia fueron estudiados 4 profesores de matemáticas de 1º de BUP (Vila, 1995). Con la finalidad de acceder a una imagen de sus *creencias* se diseñó un estudio que permitiese describir el modelo de trabajo con problemas en el aula a partir de indicadores indirectos. Así, la fuente de información se centró en las manifestaciones efectuadas por los propios profesores (a partir de entrevistas en profundidad y cuestionarios) entorno a: las «pequeñas características» o «pequeñas decisiones» tomadas, las justificaciones que daban a estas decisiones, su opinión entorno a «casos límite» o directamente la expresión de sus «postulados ideales».

El análisis de esta información nos permite describir **2 perfiles distintos** entre los 4 profesores estudiados:

- Por una parte, tanto en los profesores que llamaremos A y B, como en la profesora C observamos una clara tendencia a **relacionar la RP y los conocimientos matemáticos de una forma unidireccional**, con el énfasis exclusivamente centrado en éstos. Así, por ejemplo, los indicadores utilizados nos permiten afirmar que el **profesor A** cree que:

*La idea de *problema* conlleva inevitablemente referencias a conocimientos matemáticos y la

idea de *resolución de problemas* está intrínsecamente relacionada con la «manipulación adecuada de los datos» a partir de una actitud *operativista* o *mecanicista*.

- *Un problema puede servirle para *motivar* o atraer el interés del alumnado, o para *evaluar* la adquisición de determinados conocimientos, o para *"repasar"* conocimientos anteriores.
- *Los problemas siempre deben ser propuestos al final de los temas estudiados, con la finalidad de que puedan *"aplicarse los conocimientos adquiridos"*.
- *La capacidad de resolver problemas, a pesar de considerarla *innata*, está muy relacionada con la profundidad y cantidad de conocimientos matemáticos aprendidos.
- *Un objetivo importante suyo es *evidenciar* la resolución de los problemas propuestos, para que así los alumnos y alumnas *"aprendan"*.
- *Es indispensable que los conocimientos matemáticos implicados en la resolución de un problema y el proceso de resolución en sí mismo sean aquellos *esperados* por el profesor, aquellos en los que el profesor ha *instruido* a sus alumnos y alumnas.

Además, el estudio ha detectado otros aspectos interesantes y diferenciables en las creencias de los profesores B y C:

- *En el **profesor B** se detecta una importante influencia de una creencia que podría resumirse en la siguiente frase: *«no debe dificultarse al alumnado la posibilidad de aprobar la asignatura»*; esta creencia influye directamente en reforzar su idea de que *«los problemas deben ser puestos al servicio de los conocimientos matemáticos»*, en la medida en la que así puede *estandarizarse* el trabajo en el aula.
- *La **profesora C** defiende a menudo posturas basadas en una creencia no estudiada (ni tan siquiera relacionada propiamente con las matemáticas) que resulta ser una actitud vital suya de *«superación, autoconfianza, insistencia,...»*; sin embargo esta creencia, que muy posiblemente incide positivamente en aspectos afectivos relacionados con el trabajo con problemas en el aula, no modifican su opinión de que los problemas deben ser reducidos a *no-problemas*.

- b) Por otra parte, el **profesor que llamaremos D** manifiesta un conjunto de opiniones y creencias, coherente internamente, entorno a lo que cree que *debiera ser* el trabajo con problemas en el aula; creencias que podríamos representar, en el marco anteriormente descrito, con una cierta tendencia a entender los problemas como **«herramientas para favorecer el pensamiento matemático»**; sin embargo continuamente hace referencias a limitaciones de tipo pragmático en el sentido de que *«de momento, hoy por hoy, sin renunciar a mis principios, ¿qué puedo hacer?»*. Así, por ejemplo:

- *Su idea de *problema* incluye fuertes referencias

al término *situación*, y prevé la posibilidad de un carácter *abierto*; su idea de RP pasa necesariamente por una fase *exploratoria*.

- *Observa múltiples finalidades en la RP.
- *Propone problemas en cualquier momento y bajo cualquier pretexto.
- *Cree que uno de sus objetivos es presentar lo que él llama distintas «líneas de actuación» para la resolución de problemas, insistiendo muy claramente que lo diferencia de los términos *mecanismos* o *conocimientos matemáticos*.
- *Provoca que se discutan siempre los problemas en grupos, y insiste muy especialmente en que no sirve de nada «observar buenas resoluciones».
- *Cree que no se debe supra-valorar unas vías de resolución respecto a otras, ni unos conocimientos matemáticos implicados respecto a otros.

Sin embargo, como hemos dicho, en «la clase de hoy» reconoce no tener resueltos un conjunto de aspectos trascendentales como son: trabajar de manera efectiva problemas abiertos, valorar los avances en el aprendizaje de estrategias, y por supuesto coordinar estrechamente un trabajo de este tipo en el curriculum de matemáticas. Y esto le provoca inseguridad, y un buen número de contradicciones.

3. - Un reflejo de estas concepciones: la estandarización de los enunciados

Estos sistemas de creencias en torno a la idea de *problema* y al papel que éstos deben jugar en la educación matemática conducen a los profesores a un conjunto de decisiones (en algunos casos incluso de forma inconsciente) entorno a la tipología de enunciados de las *cuestiones* que deben ser propuestas en el aula.

Así, los profesores A, B y C, que consideran que la RP debe moverse de forma subsidiaria a los conocimientos matemáticos, necesitan una fuerte *estandarización* en los comúnmente llamados «problemas»¹ que proponen a sus alumnos, para poder centrar sus esfuerzos en conseguir reducirlos a *no-problemas*. Entendemos por **estandarización** la inclusión sistemática de referentes que fácilmente puedan identificar diferentes aspectos: los procedimientos matemáticos adecuados para la resolución, el nivel de respuesta esperado, el contexto en el que se mueve el problema,... Esto es lo que permite que los problemas sean realmente «problemas de aplicación», que los alumnos sólo deban centrar sus esfuerzos en la aplicación adecuada del procedimiento matemático adecuado o del patrón de resolución esperado, y no deban pensar en qué procedimiento es éste, dado que es evidente por la situación en la cual el problema es planteado.

El análisis de cada una de las cuestiones contenidas

¹Realmente, desde nuestra óptica negamos la categoría de problemas a la mayoría de cuestiones así planteadas a los alumnos; sin embargo mantendremos este nombre como «cajón de sastre»

en los materiales didácticos utilizados por estos 3 profesores (centrándonos exclusivamente en las unidades didácticas que se mueven en el campo de la aritmética y el álgebra), análisis contrastado con sus opiniones al respecto, nos muestra efectivamente que entre el 85% y el 95% de las cuestiones propuestas pueden considerarse *ejercicios* (destinados a facilitar la mecanización/automatización/compreensión de los conocimientos matemáticos), y la práctica totalidad del resto de cuestiones pueden considerarse *problemas contextualizados*.

Pero es que a su vez, para conseguir esta *estandarización*, los mismos profesores reconocen que hace falta tomar un conjunto de pequeñas decisiones (explícitas o implícitas) sobre los enunciados de estos problemas. Así, atendiendo a las características de la información contenida en el enunciado de las *cuestiones verbales* (los comúnmente llamados «problemas»), la práctica totalidad son *precisos*, hacen referencia a una situación *concreta* y no contienen ni exceso ni falta de información. Por otra parte, también la práctica totalidad de estas *cuestiones verbales* proponen el cálculo o la obtención de un resultado numérico.

Con lo cual las características de los enunciados de los problemas que los profesores A, B y C plantean en el aula son una consecuencia de sus creencias, pero a la vez, al ser un reflejo de ellas, pueden considerarse un indicador más.

El caso del profesor D es distinto. Recordemos que el perfil determinado en el estudio lo situaba, aunque solo en algunos momentos, cercano a la visión de *problema* como «herramienta didáctica para favorecer el pensamiento matemático». También como consecuencia (y reflejo) de este sistema de creencias, observamos que casi un 30% de las cuestiones propuestas en el aula no pueden considerarse *ejercicios* y serían los comúnmente llamados «problemas»; de éstos, la mitad pueden considerarse «**auténticos problemas**»: *problemas no contextualizados*, o bien *situaciones-problema*, o bien *problemas de estrategia*. Por otra parte solo el 55% de los enunciados de estas *cuestiones verbales* pueden considerarse *estandarizados*, proponiendo también problemas abiertos, o problemas que hacen referencia a situaciones generales, o a situaciones incoherentes, o bien conteniendo exceso o falta de información. Es, a su vez, el único profesor estudiado que, de forma significativa, plantea *cuestiones verbales* que tienen como propósito demostrar, explorar, ejemplificar, obtener pautas, tomar decisiones,... Sin embargo, el mismo profesor D reconoce que el hecho de que proponga problemas de estas características a sus alumnos no garantiza (y él lo duda) que haga un buen uso de estas situaciones didácticas; estas dudas provocan que raramente proponga problemas de estas características en pruebas escritas.

4. - ¿Tienen realmente alguna trascendencia estas concepciones y estos modelos? Una exploración de las creencias de los alumnos y alumnas

Analizada la estrecha relación existente entre las creencias de los profesores y sus decisiones en cuanto a planificación del trabajo con problemas en el aula, incluyendo las características de éstos, debemos plantearnos un aspecto crucial: *¿qué trascendencia pueden tener estas creencias en cuanto a la eficacia en el proceso de aprendizaje del alumnado?*

En uno de sus objetivos, el estudio aquí presentado se propuso efectuar una exploración de algunas creencias de los alumnos y alumnas entorno a la *idea de problema* y de *resolución de problemas*. Autores como M.Luz Callejo (1994), expresan su convicción de que determinadas creencias pueden dar lugar a comportamientos que no ayudan a los estudiantes a resolver los problemas con esperanza de éxito. Por ejemplo, en la línea de las conclusiones anteriores, esta autora afirma que *"si los estudiantes creen que la resolución de un problema solo exige la aplicación automática y directa de saberes y habilidades, invertirán más tiempo en «hacer» que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hacen y sobre para qué les sirve lo que están haciendo"* (Callejo, 1994).

El estudio, diseñado y desarrollado en la línea previamente abierta por Woods (1987) y M.Luz Callejo (1994), y efectuado sobre la totalidad del grupo-clase de 1º de BUP de cada uno de los 4 profesores estudiados, nos permite constatar por una parte que el alumnado identifica estrechamente la *idea de problema* con la *idea de pregunta*, con enunciado verbal, pregunta que hace explícita referencia a conocimientos matemáticos, considerando además que esta categoría de problema es *intrínseca*, no dependiendo del resolutor. Podríamos interpretar de los datos obtenidos, que estos alumnos y alumnas supervaloran la importancia del enunciado en la medida en la que en él esperan encontrar claramente contextualizado el problema planteado, esperan encontrar también los referentes identificativos en cuanto al campo matemático en el que debe moverse la resolución y a los términos matemáticos que van a ser necesarios para efectuar los cálculos necesarios. Por lo tanto, al identificar el *problema* en estos términos, el alumnado en general considera el problema tan solo como una *situación escolar*, que requiere un *tratamiento escolar*. Así, podríamos decir que la diferencia entre *ejercicio* y *problema* radica, para ellos, en el hecho de que los problemas tienen enunciado verbal, y por supuesto los referentes antes mencionados no son tan evidentes.

Tan solo entre los alumnos y alumnas del profesor D, encontramos de forma significativa alguna referencia a la *idea de problema* en términos de *situación*, y relacionándole características que lo diferencian de una simple ejercitación o aplicación de conocimientos.

Por otra parte, y en cuanto a las creencias de este alumnado en general entorno a la RP, podemos concluir en primer lugar que mayoritariamente esperan o pretenden llegar a «**aprender un método para resolver problemas**» (método del cual se ha captado la idea de que efectivamente «*debe existir y hay expertos, como el profesor, que lo han*

aprendido»), y que este método podrán dominarlo en la medida en la que dominen los **conocimientos matemáticos**. Estas creencias están fuertemente arraigadas, a pesar de que manifiestan (o quizás mejor, *reivindican*) que hace falta también otro tipo de habilidades para resolver problemas.

Otro aspecto también detectado (lo que constituye una conclusión central del estudio) es la existencia de una importante **relación entre la práctica escolar y estas creencias**. Es entre los alumnos y alumnas de A, B y C donde más arraigadas están las creencias anteriores, y es entre los alumnos y alumnas de D donde menos. Sin embargo en algunos ítems del cuestionario sobre creencias administrado al alumnado de la profesora C se observan claras diferencias respecto a los casos A y B; la interpretación que se ha dado a este hecho hace referencia más a la actitud personal² de la profesora en clase o en actividades de tutoría que al modelo de trabajo con problemas o a sus creencias.

5. - Un aspecto crucial: algunas de las dificultades con las que se encuentran los alumnos y alumnas al abordar determinados problemas

Continuando en la línea de analizar la trascendencia que las creencias del profesorado y sus consecuentes planteamientos en el aula puedan tener en el aprendizaje de alumnos y alumnas, un último objetivo del estudio fue el de explorar algunas **acciones** de éstos ante determinados problemas, de manera que pudiésemos tener una imagen de determinadas **dificultades** con las que pueden encontrarse cuando abordan «auténticos problemas».

Con esta finalidad se diseñó la fase del estudio en la que se analizaron las resoluciones dadas por la totalidad de alumnos y alumnas de los 4 profesores estudiados a una colección de 8 cuestiones, aislando en cada una de ellas distintas características (frecuentemente presentes en problemas abiertos o en situaciones-problema) siguiendo la línea de estudios anteriores (NCTM, 1981 y Puchalska-Semadeni, 1987). Se trataba de problemas con enunciados que hacían referencia a casos generales, que contenían una evidente falta o exceso de información, que contenían información claramente contradictoria, que hacían referencia a situaciones muy familiares pero imprecisas, o que proponían la obtención de un amplio conjunto de resultados admisibles o incluso la determinación de alguna regularidad en el conjunto de soluciones.

El análisis cualitativo de estas acciones explicitadas en las hojas de resolución (o implícitas en los cálculos, representaciones o comentarios anotados), y centrándonos únicamente en la fase de abordaje (Mason, 1988), nos permite concluir que las acciones más frecuentes en la resolución de estos problemas son: no responder, efectuar cálculos sin ningún sentido, efectuar anotaciones sin continuidad, no

asumir que se está delante de un problema de matemáticas respondiendo a partir de experiencias personales anteriores o de creencias sin relación a las matemáticas, variar el propósito del enunciado, ...

Analizando detalladamente estas acciones y relacionándolas con las creencias detectadas en estos mismos grupos-clase, podemos formular de manera razonable una hipótesis explicativa: los alumnos buscan en los enunciados de los problemas un conjunto de referentes habituales (consensuados explícitamente o implícitamente con el profesor, a partir de la práctica escolar anterior) que les permitan por una parte descubrir cuál es el procedimiento matemático (o el campo de conocimientos) al cual hace referencia, y por otra parte decidir la manipulación más adecuada de los datos contenidos en el enunciado; sin embargo estos referentes no son hallados en estos enunciados, o bien son hallados pero se trata de referentes inadecuados³; en cualquier caso, se intentan aplicar los «mecanismos» habituales, y al no «funcionar», o «funcionar de forma incompleta», el resultado es un bloqueo, una acción incoherente, o una «salida del problema» (por ejemplo, no asumiendo que se trata de un problema de matemáticas).

Profundizando más en el análisis anterior, podemos formular tres nuevas conclusiones. En primer lugar, los datos obtenidos en el estudio nos permiten establecer que no hay una clara relación entre aquellas acciones que en cierta manera podríamos calificar de satisfactorias (o que pueden llevar a una fase de ataque efectiva) y las calificaciones de matemáticas de 1º de BUP obtenidas por los alumnos durante el mismo curso⁴. Esta conclusión tiene importancia en la medida en la que nos anticipamos a una hipotética objeción a las conclusiones del estudio, objeción que vendría formulada en términos de "estamos hablando no tanto de problemas poco frecuentes en el aula, como de problemas más difíciles que los habitualmente propuestos en el aula; por lo tanto solo el alumnado mejor preparado tiene capacidad para enfrentarse a ellos con alguna garantía de éxito".

En segundo lugar, el hecho de haber trabajado en el aula con problemas de estas características (y por lo tanto bajo un modelo de trabajo distinto, en algunos momentos, del que hemos llamado «*reducción de los problemas a no-problemas*») aumenta las posibilidades de desarrollar acciones satisfactorias. Este es el caso de los alumnos y alumnas del profesor D.

Y finalmente, a pesar de la conclusión anterior, se ha constatado que no todos los problemas pueden considerarse abordados con un cierto éxito por los alumnos y alumnas del profesor D; ni tan siquiera en

²2. Actitud personal, anteriormente mencionada, de espíritu de superación, autoconfianza e insistencia

3. No olvidemos que se trataba de enunciados de problemas con características poco o nada frecuentes en la experiencia anterior del alumno, como el mismo estudio había detectado

4. Los datos del estudio fueron obtenidos durante el mes de junio de 1994

aquellos problemas en los que las diferencias respecto a los otros grupos son más significativas podemos hablar de resultados satisfactorios. Así pues, podríamos formular una última conclusión en la línea de la efectuada por Puchalska y Semadeni (1987) con alumnos de 7 años: para conseguir una cierta efectividad, no es suficiente con el trabajo de forma aislada con problemas de este tipo, tal como vemos que se produce en el caso del profesor D.

6.- Una reflexión final

El estudio aquí presentado nos ha mostrado un buen número de conclusiones que cabe considerar de una cierta trascendencia en cuanto a sus implicaciones didácticas. Pero principalmente nos ha inducido a emitir unas hipótesis no menos trascendentes, hipótesis que deberán ser contrastadas en posteriores estudios.

Estas conclusiones e hipótesis nos llevan a considerar que, en el caso en el que un profesor o profesora considere importante⁵ que sus alumnos y alumnas aprendan a enfrentarse a situaciones que les son totalmente desconocidas, deberá en primer lugar *asumir*, no miméticamente, que la Resolución de Problemas debe jugar un papel *intrínsecamente* importante.

Esta creencia deberá quedar reflejada en su actitud en clase, en la atmósfera creada en el aula, y en las decisiones tomadas en el diseño y desarrollo curricular en cuanto a la pretensión, entre otras, de conseguir en el alumnado un cambio cualitativo en sus creencias (sobre la idea de problema y de resolución de problemas, sobre lo que se espera de ellos, y lo que ellos mismos deben esperar de la RP).

En caso contrario, no es fácil que sea la educación matemática recibida la que capacite al alumnado a enfrentarse con garantías de éxito a «auténticos problemas», incluso al alumnado «mejor preparado», y en cualquier caso no nos referimos al éxito solo en términos de «obtención de la solución buscada», sino también desde una perspectiva de tipo afectivo: «la satisfacción con la tarea desarrollada durante el proceso de resolución».

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- * CALLEJO, M.L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*. Narcea, Madrid
- * DOUADY, R. (1986): "Jeux de cadres et dialectique outil-objet". Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.7, n.2, pp 5-31
- * KUHS, T.M. y BALL, D.L. (1986): *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills and dispositions*. East Lansing, Michigan State University, center on Teacher Education.
- * MASON, J., BURTON, L. y STACEY, K. (1988): *Pensar Matemáticamente*. Editorial Labor-MEC. Madrid.
- * N.C.T.M. (1981): *Report on the Second National Assessment of the Educational Progress*. NCTM. Reston, Virginia
- * PUCHALSKA, E. y SEMADENI, Z. (1987): "Children's Reactions to Verbal Arithmetical Problems with Missing. Surplus or Contradictory Data". For the Learning of Mathematics, vol.7, pp 9-16
- * SCHOENFELD, A.H. (1991): "Wath's all the fuss about Problem Solving?". ZDM, 9/91
- * THOMPSON, A.G. (1984): "The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice". Educational Studies in Mathematics, 15, pp 105-127
- * VILA, A. (1995): *Els problemes estandarditzats a la classe de matemàtiques. Una contribució a l'estudi de les seves causes i conseqüències*. Treball inèdit. Programa de Doctorat en Did. de les Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
- * WOODS, D.R. (1987): "Misconceptions about Problem Solving". Teaching Thinking and Problem Solving. Vol.9(4)

5. Queremos resaltar esta precisión