

### 3. Historia de las Matemáticas: ¿qué enseñar y qué nos enseña?

## UNA RESTAURACIÓN DEL ÁLGEBRA ÁRABE

Luis Puig

Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València

#### 1. Introducción.

La historia oficial del álgebra, la que aparece narrada en los manuales de historia de las matemáticas o la que se menciona como referencia cuando se habla de ella en los textos de enseñanza, suele tomar la forma del relato del progreso, lento pero inexorable, en el descubrimiento de técnicas y fórmulas para la resolución de ecuaciones y en el descubrimiento de un lenguaje en el que esas técnicas y esas fórmulas aparecen, al final de la historia, verdaderamente expresadas. Ese progreso se periodiza habitualmente mediante los términos “álgebra retórica”, “álgebra sincopada” y “álgebra simbólica”, que puntúan la línea de avance que culmina con Vieta y Descartes en los siglos XVI y XVII, desde una etapa primitiva en que el “álgebra” es “retórica”, ya que los textos se escriben en lenguaje vernáculo —la época paleobabilónica entre 2000 y 1600 a. n. e.—, pasando por una etapa —representada por las *Aritméticas* de Diofanto (s. III)— en que los textos siguen escritos en vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas. Esta segunda etapa es la que se denomina con el nombre que ideó Nesselman en 1842 de “álgebra sincopada”<sup>1</sup>.

Pero un relato que se quiera canónico no puede dejar fuera de la historia el momento en que se constituye lo que llamamos matemáticas, es decir, la época de la Grecia clásica, que Diofanto, demasiado tardío, no puede representar. Afortunadamente, Zeuthen tuvo la idea, en 1886, de calificar de “álgebra geométrica” el libro segundo de los *Elementos* de Euclides<sup>2</sup>, con lo

que, al añadirse esta supuesta álgebra a las otras especies de álgebras, ya no había ninguna dificultad para seguir la doctrina según la cual “la ciencia clásica es europea y sus orígenes son legibles directamente en la ciencia y en la filosofía griegas”<sup>3</sup>.

Si la historia se narra siguiendo ese hilo, el álgebra árabe clásica, la que se desarrolla desde el siglo IX a partir del *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqabala*—*al-kita al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa'l-muqabala*— de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, de cuyo título ha tomado su nombre el álgebra en la mayoría de las lenguas europeas, queda relegada al papel de mero intermediario entre la herencia griega y el Occidente cristiano medieval<sup>4</sup>, y, además, de intermediario malo, ya que no significa progreso alguno, sino que, por el contrario, se ve como un retroceso a la etapa del “álgebra retórica”.

---

*Altertum*. Kopenhagen: Høst & Sohn, 1886. Como el mismo Szabó señala, aunque es cierto que los enunciados de esas proposiciones pueden traducirse con facilidad a enunciados algebraicos, desde ningún otro punto de vista puede calificarse esa parte del texto euclídeo de algebraico (cf. Árpád Szabó. *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Vrin, 1977, págs. 367 y ss.).

<sup>3</sup>Cf. Roshdi Rashed, “La notion de science occidentale”. En *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes*. Paris: Les Belles Lettres, 1984, pág. 301. En este texto, Rashed denuncia la existencia de esta doctrina, implícita o explícitamente, en la mayor parte de los trabajos de historia de las matemáticas y las consecuencias que tiene para la consideración de lo que se ha hecho fuera del Occidente cristiano.

<sup>4</sup>O, incluso, desaparece. Esto es lo que sucede en el libro de Nicholas Bourbaki *Éléments d'Histoire des Mathématiques* [Paris: Hermann, 1969], en cuyo capítulo *L'Évolution de l'Algèbre* el álgebra árabe ni se menciona.

---

<sup>1</sup>El texto en que G. H. F. Nesselman introdujo ese término es *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer, 1842. También en ese texto habla de “álgebra retórica”, pero, por supuesto, sin referirse con este término al álgebra babilónica, cuyo corpus aún no había sido establecido.

<sup>2</sup>Según Árpád Szabó, Tannery habló ya en 1882 de proposiciones algebraicas bajo forma geométrica. El texto en que Hieronimus Georg Zeuthen introduce esta noción de “álgebra geométrica” es *Die Lehre von den Kegelschnitten im*

## 2. Restaurar el álgebra árabe.

Desde hace ya una treintena de años se está urdiendo otra trama que permite hacer desempeñar al álgebra árabe clásica un papel distinto, gracias fundamentalmente, desde mi punto de vista, a los trabajos de Roshdi Rashed y de Jens Høyrup. Aunque resulta poco menos que imposible enumerar en pocas líneas todo lo que cada uno de ellos ha realizado, o tratar de resumirlo, y más aún intentar encajar conjuntamente las piezas elaboradas por uno y otro, en este apartado presento un comprimido de todo ello.

A Roshdi Rashed se le debe el descubrimiento y el establecimiento, entre otros, del texto de cuatro de los libros de las *Aritméticas* de Diofanto que se daban por perdidos, en una traducción árabe de Qusta ibn Luqa con el título de *Arte del Álgebra*, hecha pocos años después de la aparición del libro de al-Khwārizmī; el texto de un *Tratado sobre las ecuaciones* de Sharaf al-Din al-Tusi (s. XII), que desarrolla la obra algebraica ya conocida de Umar al-Khayyam; y los textos de los libros de al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham *Tratado sobre el Análisis y la Síntesis* y *Tratado sobre los Conocidos*, en los que éste no sólo retoma este método griego, sino que lo desglosa al considerar subtipos de los dos tipos, teórico y problemático, distinguidos por Pappus, y presenta ejemplos de aplicación de cada uno de los subtipos en las distintas partes de las matemáticas<sup>5</sup>. Es obvio que la aparición de estos textos desconocidos hasta la fecha obliga a volver a organizar partes importantes de la historia de las matemáticas, pero, además, su hallazgo no es fruto simplemente del azar, sino de un proyecto general<sup>6</sup> que, precisamente por tomar las matemáticas árabes clásicas como un corpus específico y no como mero transmisor de otros

legados, hace buscar los documentos cruciales y no los anecdóticos.

Jens Høyrup, por su parte, ha desarrollado una nueva lectura de los textos algebraicos babilónicos que se propone no proyectar sobre ellos el álgebra posterior, sino recomponer el sentido del texto a partir de los usos de los términos técnicos —y, en general, la estructura del sistema matemático de signos con que están escritos— que están efectivamente presentes en ellos. Esta lectura ha tenido como consecuencia dejar de verlos como textos que tratan sobre números y propiedades aritméticas, para mostrarlos como textos geométricos en los que, sin embargo, los objetos y relaciones geométricos carecen de compromiso ontológico y pueden, por tanto, usarse para *representar* otros tipos de objetos<sup>7</sup>. Además, Høyrup ha rastreado varias tradiciones de planteamiento de problemas con formato de enigmas o pasatiempos y de técnicas para su resolución, presentes desde la época paleobabilónica hasta la Edad Media. La fuente de esos problemas, cuyos enunciados los presentan como si fueran problemas del “mundo real”, pero que, en todos los casos, es imposible que se presenten en la actividad práctica, la sitúa Høyrup en dos tipos de prácticas: por un lado, la de los ejercicios escolares en los que se pretende entrenar en el uso de técnicas y, por otro lado, la exhibición de la maestría en el dominio de las técnicas de una profesión. Esta última práctica, de los agrimensores en particular, habría constituido una tradición “subcientífica” persistente a través de los siglos en la que se habrían generado incluso técnicas para resolver problemas ahora ya ajenos a la actividad profesional y planteados con el único objetivo de mostrar el orgullo de la profesión, en concreto, las técnicas para resolver los problemas “de segundo grado”<sup>8</sup>.

Esa nueva lectura de los textos babilónicos de “álgebra” y ese establecimiento de tradiciones “subcientíficas” de resolución de problemas proporcionan unos antecedentes nuevos para el álgebra árabe clásica, que Høyrup no sólo postula como posibles, sino que presenta una prueba<sup>9</sup> de que

<sup>5</sup> Los dos primeros están editados por Les Belles Lettres en la colección *Sciences et Philosophie Arabes*, que dirige el propio Rashed: Diophante, *Tome III. Les Arithmétiques. Livre IV, et Tome IV, Livres V, VI et VII. Texte de la traduction arabe de Qusta ibn Luqa établi et traduit par Roshdi Rashed*. Paris: Les Belles Lettres, 1984; Sharaf al-Din al-Tusi, *Œuvres mathématiques, Algèbre et Géométrie au XII<sup>e</sup> siècle. Tomes I et II. Texte établi et traduit par Roshdi Rashed*. Paris: Les Belles Lettres, 1986. Los otros dos son los primeros de una serie de tres artículos que han aparecido en *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*: Roshdi Rashed, “La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham”, suivi du “Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur l'analyse et la synthèse”, *MIDEO*, vol. 20, págs. 31-231, 1990; y Roshdi Rashed, “La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham, – II: «Les Connus»”, suivi du “Traité d'al-Hasan Ibn al-Hasan Ibn al-Haytham sur les connus”, *MIDEO*, vol. 21, págs. 87-276, 1993.

<sup>6</sup> Este proyecto se describe en su recopilación de artículos *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des Mathématiques arabes*, op. cit.

<sup>7</sup> Cf. Jens Høyrup. “Algebra and Naïve Geometry. An investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought”. *Altorientalische Forschungen*. Vol. 17, págs. 27-69 y 262-354, 1990.

<sup>8</sup> Cf. Jens Høyrup. “‘Algèbre d'al-gabr’ et ‘algèbre d'arpentage’ au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne”, in Fr. Mawet & Ph. Talon, eds., *D'Imhotep à Copernic. Astronomie et mathématiques des origines orientales au moyen âge*, pp. 83-110. Actes du Colloque International, Université Libre de Bruxelles, 3-4 novembre 1989 (Lettres Orientales, 2) Leuven: Peeters, 1992; y Jens Høyrup, “The Antecedents of Algebra”, *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints 1994 nr. 1.

<sup>9</sup> Cf. Jens Høyrup, “Al-Khwārizmī, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra”, *ERDEM*, vol. 2, págs. 445-484,

efectivamente actuaron como antecedentes de alguna manera. La prueba es un *Liber mensurationum*, escrito por un tal Abu Bakr, probablemente a comienzos del siglo IX y, en todo caso, antes del libro de al-Khwarizmi, cuyo original árabe no se ha encontrado, pero del que hay editada<sup>10</sup> una traducción latina del siglo XII, hecha por Gerardo de Cremona. Una parte de ese libro contiene una serie de problemas que están resueltos de dos maneras: una que sigue una pauta similar a la de los textos paleobabilónicos y otra que Abu Bakr indica que está hecha “según *al-jabr*” y que es muy similar a la que aparece en el libro de al-Khwarizmi. Esta segunda técnica correspondería a otra tradición subcientífica, propia de los que Thabit ibn Qurrah llama “gentes de *al-jabr*” o “seguidores de *al-jabr*”<sup>11</sup>, que probablemente eran algún tipo de contables.

Combinando lo que nos enseña Rashed con lo que nos enseña Høyrup, el libro de al-Khwarizmi aparece pues como el momento de fundación de una nueva disciplina teórica, a partir de la crítica de las técnicas desarrolladas en tradiciones “subcientíficas” ligadas a distintas prácticas, que es reconocido inmediatamente como una nueva disciplina y que tiene una continuación floreciente durante varios siglos en el mundo árabe.

### 3. Una mirada de cerca al texto de al-Khwarizmi

Una vez situado el libro conciso de cálculo de *al-jabr* y *al-muqabala* en el lugar en que lo he situado en el apartado anterior, lo que me propongo ahora es presentar un apunte de sus rasgos característicos. Para ello examinaré algunos de los términos técnicos que usa al-Khwarizmi, la organización general del libro y tres textos encadenados: el enunciado de una regla para resolver un tipo de ecuación, su justificación y su aplicación a un problema.

#### 3.1. Los términos primitivos.

Si el libro de al-Khwarizmi se traduce al sistema matemático de signos (SMS) del álgebra elemental actual —como se ha hecho habitualmente—, trata de la resolución de ecuaciones cuadráticas y de

problemas que pueden resolverse mediante éstas. Ahora bien, esa traducción hace que a menudo los enunciados de al-Khwarizmi parezcan torpes, redundantes o carentes de sentido. Ello se debe a que los términos que utiliza no tienen el significado que tienen en el SMS de ese álgebra los componentes de una expresión como .

En efecto, al comienzo del libro, al-Khwarizmi introduce lo que normalmente se ha traducido por los tres términos del trinomio, que él llama “las tres especies de números”, pero la palabra que en las traducciones se ha hecho corresponder al cuadrado de la incógnita no es la palabra árabe que significa ‘cuadrado’, sino la palabra *mal*, cuyo significado es ‘posesión’ o ‘tesoro’. Si mantenemos la traducción literal ‘tesoro’ para *mal*, el texto de al-Khwarizmi queda así<sup>12</sup>:

[...] los números que son necesarios para calcular por *al-jabr* y *al-muqabala* son de tres especies, a saber, raíces, tesoros y simples números sin referencia a raíz ni a tesoro.

Una raíz es una cantidad cualquiera que será multiplicada por sí misma, consistente en unidades o números ascendentes o fracciones descendentes.

Un tesoro es la cuantía total de una raíz multiplicada por sí misma.

Un simple número es un número cualquiera que puede expresarse sin hacer referencia a raíz o tesoro. (págs. 5-6)

El carácter monetario de *mal*<sup>13</sup> aún queda más

1986.

<sup>10</sup> Hubert L. L. Busard, ‘L’algèbre au Moyen Âge: Le “Liber Mensurationum” d’Abu Bekr’, *Journal des Savants*, avril-juin, págs. 65-125, 1968.

<sup>11</sup> La edición del texto de Thabit ibn Qurrah, escrito unos cincuenta años después de la aparición del de al-Khwarizmi, en el que figura esta denominación no he podido consultarla. Es de Paul Luckey Thabit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen”, *Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Berichte* 93, págs. 93-114, 1941. La referencia la he tomado de Høyrup, *The Antecedents of Algebra*, op. cit., pág. 22 y Høyrup, ‘Algèbre d’al-gabr’ et ‘algèbre d’arcentage’..., op. cit., págs., 9-10.

<sup>12</sup> He utilizado la edición de Rosen del libro de al-Khwarizmi [Frederic Rosen. *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund, 1831], modificando en ocasiones la traducción para hacerla más literal y teniendo en cuenta las observaciones que Høyrup hace en su trabajo “‘Oxford’ and ‘Cremona’: On the relations between two Versions of al-Khwarizmi’s Algebra”. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. *Række: Preprint og Reprints* 1991 nr. 1. También he consultado las traducciones latinas medievales editadas por Barnabas Hughes, “Gerard of Cremona’s Translation of al-Khwarizmi’s *al-jabr*: A Critical Edition”, *Mediaeval Studies*, 48, págs. 211-263, 1986, y *Robert of Chester’s Translation of al-Khwarizmi’s al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Franz Steiner Verlag: Stuttgart, 1989.

<sup>13</sup> En la traducción de Gerardo de Cremona *mal* mantiene ese carácter, ya que éste utilizó el término latino *census*. Robert de Chester, sin embargo, lo tradujo por *substantia*. Ahora bien, ni uno ni otro lo tradujo por ‘cuadrado’. La traducción de Gerardo de Cremona hizo fortuna y puede encontrarse en un buen número de libros medievales. También subraya este carácter monetario el término que usó Finzi en el siglo XV al traducir al hebreo el libro de álgebra de Abu

*subrayado en otros enunciados en los que explica el significado de las “ecuaciones” y, al hacerlo, los “simples números” pasan a ser dirhams, es decir, una moneda:*

Raíces y tesoros igualan números; es como si tú dices, “un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve dirhams”; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve? (pág. 8)

Este texto, además, muestra que la identificación de la palabra ‘raíz’ con la incógnita o con la  $x$  también plantea problemas: por un lado, en el texto no se dice simplemente “la raíz”, sino “la raíz del tesoro”; por otro lado, el resultado del problema tal como lo da al-Khwarizmi deja bien claro que lo que se busca no es la raíz, sino el tesoro:

[...] queda tres, que es la raíz del tesoro que buscabas; el tesoro mismo es nueve. (pág. 8)

de modo que, en todo caso, el enunciado de este problema habría que traducirlo por  $x+10\sqrt{x}=39$ , mejor que por  $x^2+10x=39$ .

Tesoros, raíces y simples números o *dirhams* son pues los términos primitivos, las especies de números, cuyas combinaciones permiten establecer “todo lo que es necesario para calcular” en la práctica. Con ellos, puede atender al-Khwarizmi la petición del califa al-Mamun de componer un tratado conciso sobre el cálculo por *al-jabr* y *al-muqabala*, reducido a lo que es brillante e importante en las aritméticas utilizadas constantemente en los asuntos de herencias y legaciones, en los repartos y los procesos legales, en el comercio y en todos sus asuntos de agrimensura, de excavación de canales, de cálculos geométricos y otras cosas variadas de especie parecida. (pág. 3)

La conceptualización básicamente monetaria de los términos primitivos proviene probablemente de la tradición de “las gentes de *al-jabr*”, pero desde el principio representan *especies de números que se usan en cálculos*, de modo que las distintas combinaciones de esos términos primitivos pueden concebirse como moldes formales. Veremos en la descripción del esquema general del libro que lo que viene inmediatamente después de la exposición de que éstos son los términos primitivos es precisamente el establecimiento de todas sus combinaciones posibles.

Al-Khwarizmi utiliza pues estos términos monetarios para representar las posibilidades que pueden presentarse al hacer los cálculos, ahora bien, para abordar la resolución de un problema concreto

Kamil. Finzi tradujo *mal* por la palabra tomada prestada del castellano ‘algos’, con el significado obvio de ‘una cierta cantidad (de dinero)’ (cf. *The Algebra of AbuKamil, in a Commentary by Mordecai Finzi*. Hebrew text and translation, and commentary by Martin Levey. Madison, WI: The University of Wisconsin Press, 1966).

representa la incógnita mediante otro término: la palabra árabe *shay*’, que se traduce habitualmente por ‘cosa’<sup>14</sup>. Según Rashed, esta palabra es un término coránico y de la lengua filosófica, y ahí significa “todo lo que puede ser imaginado, sin realizarse sin embargo en un objeto”, por lo que tiene un carácter “vacío”, susceptible de recibir cualquier contenido y, por tanto, es un candidato ideal para nombrar una incógnita que pueda ser un número o una magnitud<sup>15</sup>. En el ejemplo de cálculo literal (§ 3.2) y en el de problema (§ 3.3) se puede ver la interacción entre el término ‘cosa’ y los términos primitivos.

### 3.2. La organización general del libro.

Ya hemos visto que el libro comienza con el establecimiento de los términos primitivos, tesoros, raíces y simples números, como las especies de números que se usan en los cálculos.

A continuación, al-Khwarizmi plantea que esas especies de números “unos pueden ser iguales a otros” y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas:

- tesoros iguales a raíces,
- tesoros iguales a números,
- raíces iguales a números,
- tesoros y raíces iguales a números,
- tesoros y números iguales a raíces, y
- raíces y números iguales a tesoros.

Estas seis posibilidades de combinación de las especies de números tienen el carácter del conjunto completo de formas normales. El resto del cálculo consistirá pues en mostrar cómo resolver cada una de estas formas normales y cómo reducir cualquier problema a una de ellas. Los capítulos siguientes del libro son:

—Enunciado de las reglas que resuelven cada una de las formas normales. (Las reglas se enuncian para un tesoro y luego se muestra cómo reducir a éste el caso en que haya varios tesoros o partes de un tesoro.)

—Demostraciones de las reglas. (Veremos un ejemplo.)

—Cálculo literal: multiplicaciones del estilo de “diez menos cosa por diez más cosa”, en las que aparece un cálculo que puede compararse con la “regla de los signos”, aunque sea para ver lo que lo separa de ésta:

Cuando dices diez menos cosa por diez y cosa, dices diez por diez, cien, y menos cosa por diez, diez cosas

<sup>14</sup> En el álgebra de AbuKamil hay algunos problemas que se resuelven de dos maneras: una, expresando la incógnita con el término ‘cosa’; la otra, representando además otras incógnitas auxiliares. Para ello, AbuKamil utiliza también términos monetarios, los nombres de dos monedas árabes: *dinar* y *fals*. (Cf. *The Algebra of AbuKamil* 1/4, op. cit., págs. 102, 116, 133, 136 y 140, entre otras.)

<sup>15</sup> Cf. Roshdi Rashed. Introduction et notes à *Les Arithmétiques, tome III*, op. cit., págs. 120-123.

“substractivas”, y cosa por diez, diez cosas “aditivas”, y menos cosa por cosa, tesoro “substractivo”; por tanto, el producto es cien dirhams menos un tesoro<sup>16</sup> (pág. 17).

—Varios capítulos de cálculo con “radicales”.

—“Los seis problemas”: seis problemas que cada uno de ellos se reduce a una de las seis formas normales. En este capítulo es en el que aparecen las dos operaciones que dan nombre al cálculo (*al-jabr* y *al-muqabala*). Esas operaciones son las que permiten reducir una expresión cualquiera que traduce el enunciado del problema en términos de operaciones con la ‘cosa’ a una de las formas normales. (Veremos uno de ellos.)

—Más problemas variados.

—Un corto capítulo sobre problemas de transacciones mercantiles.

—Un capítulo de problemas de medidas de áreas, longitudes y volúmenes de figuras geométricas.

—Un larguísimo capítulo de problemas de herencias (ocupa de hecho la mitad del libro).

La descripción somera que acabo de hacer habla por sí sola: la organización del libro no tiene nada que ver con la de sus antecedentes, que se presentan siempre como colecciones de problemas, ordenados en ocasiones por las configuraciones geométricas de las que tratan (es el caso de muchas series de tablillas babilónicas) o por otros criterios, pero nunca presentados después de un catálogo completo de formas normales a las que pueden reducirse, ni con el acompañamiento de un cálculo que al hacerse con formas vacías, ‘cosas’, es sintáctico.

### 3.3. La quinta forma normal como ejemplo.

Finalmente, presento en este apartado la serie, enunciado de la forma normal, regla, justificación de la regla y problema que se reduce a ella, ejemplificada con la quinta forma normal.

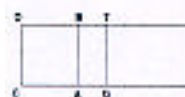
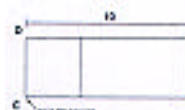
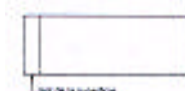
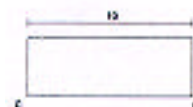
La quinta forma normal y su regla:

Tesoros y números igual a raíces; es como si tú dices, “un tesoro y veintiuno en números igualan diez raíces del mismo tesoro”. Es decir, ¿cuál será la

cuantía del tesoro que, cuando se le añade veintiún dirhams, iguala el equivalente de diez raíces del mismo tesoro? Solución: Divide en dos las raíces; la mitad es cinco. Multiplícalo por sí mismo; resulta de ello veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítale la mitad de las raíces, que es cinco; queda tres. Esto es la raíz del tesoro que pedías y el tesoro es nueve. O puedes añadir la raíz a la mitad de las raíces, eso será siete; es la raíz del tesoro que tú pedías y el tesoro mismo es cuarente y nueve.

Cuando encuentres un ejemplo que te conduzca a este caso, intenta la solución por adición, y si esto no te ayuda, la substracción servirá ciertamente. Porque en este caso se puede emplear tanto la adición como la substracción, lo que no vale en ninguno de los otros casos en los que haya que dividir en dos las raíces. (págs. 11-12)

La demostración de la validez de la regla la presento desmenuzada, y acompaño cada fragmento del texto con la figura que se va construyendo para justificar los



pasos de la regla. En el texto original sólo aparece la figura final después de la frase “Ésta es la figura”. Además del carácter didáctico de la justificación de la regla, vale la pena entretenerse en observar el cuidado que tiene al-Khwarizmi de indicar que el cuadrado es una *representación* del tesoro — distinción que obviamente desaparece si se traduce *mal* por ‘cuadrado’ o por  $x^2$ —, y la distinción que hace entre la raíz del tesoro, que está representada por un lado del cuadrado que representa el tesoro, y la raíz de la superficie, que es un rectángulo de lado la raíz del tesoro y ancho una unidad, lo que le permite representar las diez raíces<sup>17</sup>.

Cuando un tesoro y veintiún dirhams son iguales a diez raíces, representamos el tesoro como un cuadrado cuyos lados son desconocidos, que es la superficie AD.

<sup>16</sup> En vez de “negativas” y “positivas”, he traducido “substractivas” y “aditivas”, como hace Adel Anboubá, para ser menos anacrónico y mostrar que esas palabras derivan de los verbos “decrecer” y “añadir”. Ahora bien, al-Khwarizmi, gracias a la esquematización del lenguaje que usa, puede decir también “menos cosa”. Adel Anboubá señala que una expresión como “menos cosa por menos cosa igual tesoro aditivo” “va contra la gramática [...] pero es didácticamente cómoda” (cf. Adel Anboubá. “L’algèbre arabe aux IX<sup>e</sup> et X<sup>e</sup> siècles. Aperçu général”. *Journal for the History of Arabic Science* vol. 2, págs. 66-100, 1978). Está claro que aquí no hay idea alguna de número negativo, pero la operatividad con lo substractivo es mayor que la que hay en las *Aritméticas* de Diofanto, ya que el SMS con que éstas se escriben no permite más que una inscripción de la *leipsis* en cada expresión.



<sup>17</sup> Esta distinción entre la raíz del tesoro, que es una línea, y la raíz de la superficie, se convierte en el *Tratado de las ecuaciones* de Sharaf al-Din al-Tusi, en el que lo que se estudia son las cúbicas, en muchas más distinciones: hay raíces lineales, planas y sólidas, y, lo que es más interesante, tesoros planos y sólidos. La raíz sólida es “un sólido cuya base es una raíz plana y la altura una unidad lineal” y el tesoro sólido “es un sólido cuya base es el tesoro plano y cuya altura es una unidad lineal” (cf. Sharaf al-Din al-Tusi, op. cit., tome I, págs. 15-16).

A ésta añadimos un paralelogramo, la superficie  $HB$ , cuya anchura, esto es, el lado  $HN$ , es igual a uno de los lados de la superficie  $AD$ .

La longitud de las dos superficies juntas es igual al lado  $HC$ . Sabemos que su longitud es en números diez, ya que cada cuadrado tiene iguales sus lados y sus ángulos, y,

si uno de sus lados se multiplica por uno, eso da la raíz de la superficie,

y, por dos, dos de sus raíces.

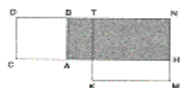
Cuando se declara que el tesoro y veintiún números es igual a diez de sus raíces,

sabemos que la longitud del lado  $HC$  es igual a diez números, ya que el lado  $CD$  es una raíz del tesoro.

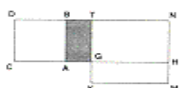
Dividimos el lado  $CH$  en dos mitades por el punto  $G$ . Entonces sabes que la línea  $HG$  es igual a la línea  $GC$ , y que la línea  $GT$  es igual a la línea  $CD$ .

Entonces extendemos la línea  $GT$  una distancia igual a la diferencia entre la línea  $CG$  y la línea  $GT$  para cuadrar la superficie. Entonces la línea  $TK$  es igual a la línea  $KM$ , y resulta un cuadrado, de lados y ángulos iguales, que es la superficie  $MT$ .

Sabemos que la línea  $TK$  es cinco y ésa es consecuentemente la longitud de los otros lados. Su superficie es veinticinco, obtenida por la multiplicación de la mitad de las raíces por sí mismo, que es cinco por cinco, igual a veinticinco.



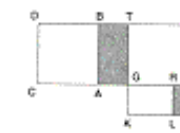
Sabemos que la superficie  $HB$  representa los veintiún números que se añaden al tesoro.



De la superficie  $HB$ , cortamos por la línea  $TK$ , uno de los lados de la superficie  $MT$ , dejando la superficie  $TA$ .



Tomamos de la línea  $KM$  la línea  $KL$ , que es igual a la línea  $GK$ .



Sabemos que la línea  $TG$  es igual a la línea  $ML$  y que la línea  $LK$ , cortada de la línea  $MK$ , es igual a  $KG$ . Entonces la superficie  $MR$  es igual a la superficie  $TA$ .



Sabemos que la superficie  $HT$  añadida a la superficie  $MR$  es igual a la superficie  $HB$  que es veintiuno.



Pero la superficie  $MT$  es



veinticinco. Y así, restamos de la superficie  $MT$ , la superficie  $HT$  y la superficie  $MR$ , entre ambas igual a veintiuno. Nos queda una superficie pequeña  $RK$ , que es veinticinco menos veintiuno, que es cuatro.

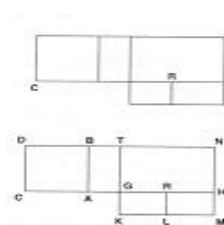
Su raíz, la línea  $RG$ , es igual a la línea  $GA$ , que es dos.

Si lo restamos de la línea  $CG$ , que es la mitad de las raíces, queda la línea  $AC$ , que es 3.

Ésta es la raíz del primer tesoro.

Si se añade la línea  $GC$ , que es la mitad de las raíces, resulta siete, o la línea  $RC$ , la raíz de un tesoro más grande.

Si se añade veintiuno a este tesoro, también el resultado será diez de sus raíces.



Ésta es la figura. (págs. 16-18)

El problema correspondiente:

Si una persona te pide esto: "He dividido diez en dos partes, y cuando he multi-

plicado una por otra, resultó veintiuno"; entonces tú sabes que una de las dos partes es cosa y la otra diez menos cosa. Multiplica por tanto cosa por diez me

nos cosa; entonces tendrás diez cosas menos un tesoro, lo que es igual a veintiuno. Separa el tesoro de las diez cosas y añádelo al veintiuno. Entonces tendrás diez cosas, que igualan veintiún dirhems y un tesoro. Quita la mitad de las raíces y multiplica el cinco que queda por sí mismo; es veinticinco. Quítale el veintiuno asociado con el tesoro; el resto es cuatro. Extrae su raíz, es dos. Quítalo de la mitad de las raíces, a saber, cinco; queda tres, que es una de las dos partes. O, si lo prefieres, puedes añadir la raíz de cuatro a la mitad de las raíces. La suma es siete, lo que también es una de las partes (págs. 41-42).

#### 4. En perspectiva. Componentes de una arqueología del álgebra.

El apunte que he presentado aquí en torno al *Libro conciso de cálculo de al-jabr y al-muqabala* de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi he querido situarlo frente a una cierta historia oficial del álgebra y lo he apoyado en los trabajos monumentales de dos historiadores, cuya producción no deja de ofrecer nuevos materiales día a día. Mi trabajo, sin embargo, tiene su origen en el programa de investigación iniciado hace ya años por Eugenio Filloy en el que el estudio de la historia de las ideas matemáticas se pone al servicio de la investigación didáctica. En él, la elaboración del álgebra simbólica, tanto en la historia como en el aprendizaje en la escuela, se veía como "la identificación final en un solo estrato de lenguaje de estratos anteriores de lenguaje irreductibles uno a otro hasta que no se ha desarrollado el lenguaje más

abstracto”<sup>18</sup>. Esta noción de ‘estratos de lenguaje’ ha sido transformada por el propio Filloy en una noción de sistemas matemáticos de signos (SMS)<sup>19</sup> que ha de ser lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares —y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido—, así como de los textos matemáticos históricos —tomados como monumentos, petrificaciones de la acción humana o de procesos de cognición propios de una episteme. Para ello, en el caso del álgebra es preciso, a mi entender, entrelazar varias historias: la historia de la elaboración de SMS del álgebra, en particular, la de la operatividad sintáctica; la historia de los conceptos de número; la historia de las tradiciones subcientíficas de resolución de problemas; la historia de la idea de generar posibilidades hasta agotarlas; la historia del método de análisis y síntesis. Ésos son componentes de una arqueología del álgebra, que he querido tener presentes en este sucinto examen del libro de al-Khwarizmi, y que el estudio del álgebra árabe clásica contribuirá a desarrollar.

---

<sup>18</sup> Eugenio Filloy y Teresa Rojano. “La aparición del lenguaje aritmético-algebraico”. *L’educazione matematica*, vol V, págs. 1-16, 1984, pág. 3.

<sup>19</sup> Esta noción de “sistemas matemáticos de signos” se introduce en Carolyn Kieran y Eugenio Filloy. “El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica”. Traducción de Luis Puig. *Enseñanza de las ciencias*, vol 7, págs. 229-240, 1989. Ver también mi texto: Luis Puig. *Semiótica y matemáticas*. Valencia: Episteme, col. Eutopías, 1994.