

LOS TRES PROBLEMAS CLÁSICOS

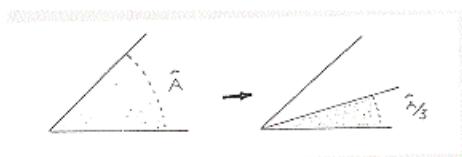
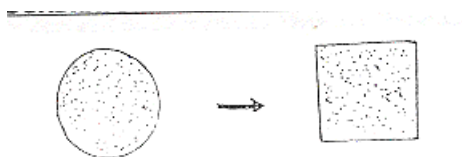
Santiago Fernández
(C.O.P. de Santurce)

Durante mucho tiempo, siglos en algunos casos, varios problemas han resistido los "ataques" de toda la artillería matemática, la lista de tales problemas es demasiado larga para exponerla en estas breves páginas. La búsqueda obstinada, y en algunos casos estéril, ha resultado muy beneficiosa para el crecimiento de la matemática, se puede decir que el valor de lo imposible ha resultado, paradójicamente, altamente productivo.

Entre los muchos problemas planteados en este contexto, uno de los más singulares e interesantes es el llamado "tres problemas Clásicos". Nos referimos a: el problema de la cuadratura del círculo, el problema de la trisección del ángulo y el problema de la duplicación del cubo. El enunciado de los tres problemas es distinto, pero curiosamente los tres están ligados a un mismo destino y desenlace.

Estos problemas comenzaron a circular por la Grecia antigua hacia el siglo V a. de J.C. ¿Cómo surgieron? Hay muchas historias detrás de los mismos, pero seguramente su origen se encuentre relacionado con el afán de resolver problemas análogos a otros, que fueron solucionados de manera inmediata, nos referimos a:

- 1) Dado un cuadrado cualquiera, construir otro cuadrado de área doble que el anterior (**Duplicación del cuadrado**)
- 2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la mitad del ángulo dado (**Bisección del ángulo**)
- 3) Dado un polígono cualquiera, construir un cuadrado cuya área sea igual a la del polígono (**Cuadratura del polígono**)

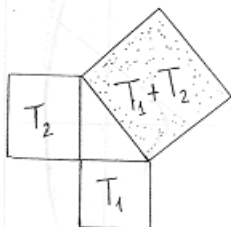
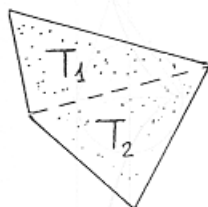
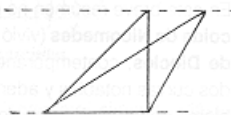
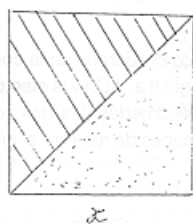
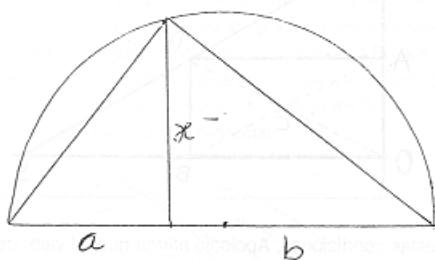
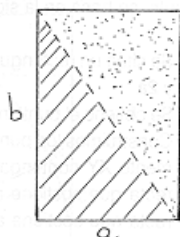
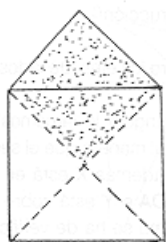
Duplicación del cubo**Trisección del ángulo****Cuadratura del círculo****Enunciado de los tres problemas**

****Utilizando únicamente regla y compás****

- 1) Dado un cubo cualquiera, construir otro cubo de volumen doble del anterior (**duplicación del cubo**)
- 2) Dado un ángulo cualquiera, construir un ángulo que sea la tercera parte del ángulo dado (**trisección del ángulo**)
- 3) Dado un círculo cualquiera, construir un cuadrado que tenga la misma área que el círculo (**cuadratura del círculo**)

**** Resolviendo los tres problemas utilizando únicamente regla y compás ****

Como muestran los siguientes dibujos la solución de los mismos es elemental, tan sólo son necesarios los siguientes conocimientos: Teorema de la altura, Teorema de Pitágoras y la medida del ángulo inscrito en una circunferencia.



Una vez examinados los esquemas y razonamientos anteriores ¿Por qué no habrían de resolverse los "tres problemas" planteados al inicio?. Si nos detenemos un momento en el problema de la cuadratura del círculo, todo nos lleva a pensar que es bastante probable que se pueda solucionar en las condiciones prefijadas (utilizando únicamente la regla y el compás), en efecto: si son cuadrables los triángulos, cuadriláteros, pentágonos,... y en general cualquier polígono ¿Por qué no iba a serlo el círculo? . Además si ciertos trozos de círculo son cuadrables (" las Lúnulas" de Hipócrates de Quios (470 - 400 a. J.C.) ¿Qué razón habría para no serlo todo el círculo ? . En definitiva ¿Qué fallaba en el paso de lo particular a lo general?.

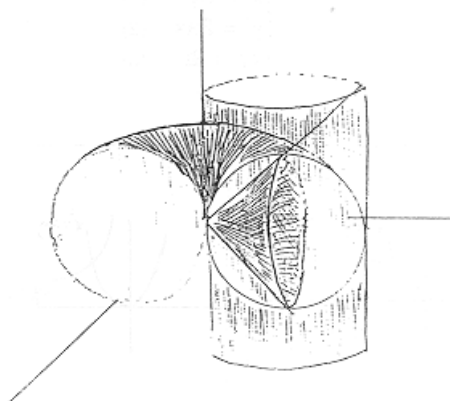
Para mi, el problema más interesante fue el de la duplicación del cubo. El deseo de buscar dos medias proporcionales entre dos valores dados pudo ser su origen - Esto es: dados **a** y **b**, calcular dos valores **x** e **y** tales que verifiquen las siguientes relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

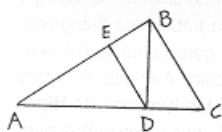
En el caso particular de que **b = 2a** obtenemos que el valor **x** es el valor del lado del cubo que estamos buscando.

Nos surge por tanto la siguiente pregunta: ¿Cómo construir los valores **x** e **y** medias proporcionales entre los valores **a** y **2a** ?

Una de las respuestas más sorprendentes es la que presentó **Arquitas de Tarento** (430 - 365 a. J.C.), dice Arquitas que: la intersección de un cilindro recto, un cono circular y un toro da como solución un punto que justamente tiene como coordenada el valor que resuelve el problema de la duplicación del cubo.



La idea central de la construcción propuesta por Arquitas se basa en la división adecuada dentro del triángulo rectángulo ABC.



Si llamamos

$$\overline{AE} = a; \quad \overline{AC} = 2a$$

Al ser semejantes los triángulos ABC, ADB y AED, se verifica que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

siendo $\overline{AB} = y$, $\overline{AD} = x$

Por tanto la ingeniosa construcción tridimensional esconde un problema bidimensional que es el siguiente: dados los segmentos

$$\overline{AC} = 2a, \quad \overline{AE} = a$$

construir el triángulo que se muestra en la figura donde $\overline{AD}$ es la solución del problema de la duplicación del cubo.

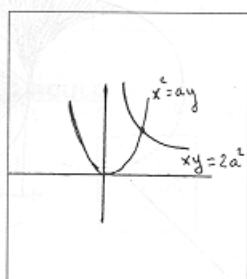
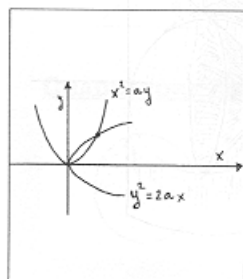
Ante esta sorprendente construcción surge una pregunta inquietante: ¿Fue Arquitas capaz de resolver el problema de la duplicación del cubo de manera sintética, o bien conocía de alguna manera un método basado en coordenadas?.

Menecmo (374 - 325 a. J.C.) atacó el problema de forma diferente, para él las relaciones

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

le llevaron a las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} x^2 = ay & (1) \\ y^2 = 2ax & (2) \\ xy = 2a^2 & (3) \end{cases}$$

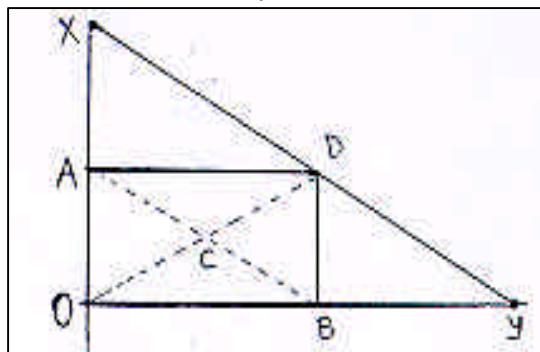


Que como sabemos (1) y (2) corresponden a ecuaciones de parábolas mientras que la ecuación (3) es una hipérbola.

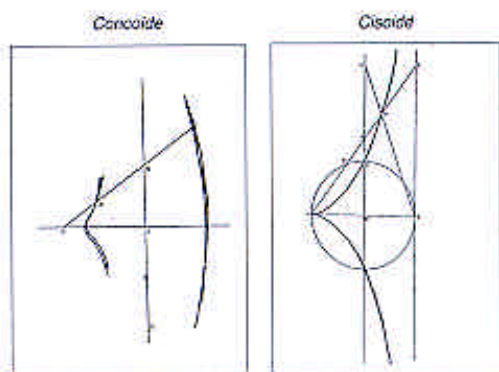
El gran **Apolonio de Perga** (262-190 a. J.C.) también dedicó un tiempo a resolver el problema de la duplicación del cubo, él encontró una solución original y relativamente simple, se basa en la siguiente construcción:

- 1) Se sitúa un rectángulo **OADB** sobre los ejes, de lados a y $2a$
- 2) Se obtiene el punto medio del rectángulo, le llamamos **C**
- 3) Construimos los puntos **X** e **Y** de tal manera que el segmento **XY** contenga el punto **D**, además **X** está en la recta que sostiene al segmento **OA** e **Y** está sobre la recta que sostiene a **OB**. Por último se ha de verificar que **CX=CY**.

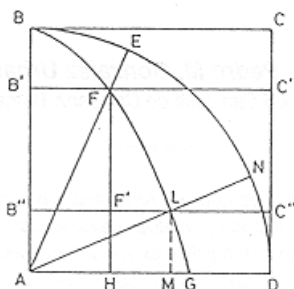
En estas condiciones, Apolonio afirma que: el valor de los segmentos $AX=x$ e $BY=y$ son las medias proporcionales entre a y $2a$ (la demostración se puede realizar por varios procedimientos, uno de ellos es la aplicación conjunta del Teorema de Tales y de la proposición III,35 perteneciente a "Los Elementos" de **Euclides**)



En este breve resumen no podemos olvidarnos de la **concoide de Nicomedes** (vivió en el siglo II a. J.C.) y la **cisoide de Diocles**, contemporáneo de Nicomedes, las dos son dos curvas notables y además capaces de resolver el problema de la duplicación del cubo.

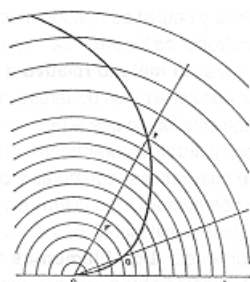


La trisección del ángulo también nos presentó curvas maravillosas y en las que subyace el enorme ingenio matemático, entre todas ellas merecen especial distinción la **cuadratriz** de **Hipías** y la **espiral** del genial **Arquímedes de Siracusa** (287 -212 a. J.C.) .



La cuadratriz de Hipias 1

La cuadratriz, es una curva que se genera al unir las sucesivas intersecciones de la recta AB cuando gira uniformemente sobre el punto A hasta llegar a la posición DA, y de la recta BC que se desplaza uniforme y paralelamente hasta llegar a la posición DA. Como puede observarse es una curva continua BFLG, obteniéndose el punto G por continuidad.



La espiral de Arquímedes 1

Este breve resumen no estaría "completo" si nos olvidásemos del problema de la cuadratura del círculo. Sin duda fue el más famoso de los tres

problemas, se convirtió en un fabuloso rompecabezas. Tuvo dos vertientes : una aproximada, que condujo a problemas de rectificación de curvas, y en particular de la circunferencia; aquí se sitúan métodos altamente ingeniosos para calcular π con una precisión asombrosa, cabe citar el procedimiento ideado por Specht en 1836. Calcula el número π con exactitud hasta la quinta cifra decimal, en efecto según su procedimiento π toma el valor de 3,1415919 frente al exacto 3,1415927...

En la vertiente exacta el recorrido es difícil de resumir, no obstante tuvo unos hitos trascendentales en su caminar a lo largo de unos dos milenios. A finales del siglo XVIII **I. Lambert** y **A. Legendre** demostraron que el número π no es racional, más tarde en 1882, **F. Lindemann** en una memoria publicada en los *Mathematische Annalen* demuestra - siguiendo un proceso similar al descubierto por **C. Hermite** en 1873 respecto a la trascendencia del número e - que también el número π es trascendente. En 1893 **D. Hilbert** realizó una demostración mucho más sencilla de la trascendencia del número π .

Un número real es construible con regla y compás si verifica dos condiciones (además son necesarias y suficientes):

- 1) el número es algebraico sobre $\mathbb{Q}$
- 2) el polinomio irreducible que le contiene como raíz es una potencia de 2

Wantzell pone fin a la aventura de los tres problemas, así enuncia un famoso teorema que lleva su nombre:

Este resultado pone fin a la tremenda polémica, demostrando sin ninguna duda, que los **tres problemas son irresolubles en las condiciones expuestas al inicio**.

Después de este breve recorrido histórico por los tres problemas nos surgen varias cuestiones :

- a) ¿Llegaron a intuir los griegos la imposibilidad de los problemas?
- b) ¿Conocían el método de coordenadas ?