

LA ETAPA EMPÍRICA DEL CÁLCULO

Pedro M. González Urbaneja

I.B. San José de Calasanz. Barcelona

Se describe la naturaleza y se hace un análisis temático de los problemas más representativos de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. Con el uso de "*indivisibles*" e "*infinitamente pequeños*" prima la argumentación heurística sobre la apodíctica, pero la fecundidad de las nuevas técnicas fue asombrosa. Soslayando la rigidez de la exhaución griega mediante artificios geométricos se resiente el rigor impecable de la geometría griega, pero se ingenian magníficos procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, abriendo el paso hacia la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir hacia la elaboración del algoritmo que desarrollan Newton y Leibniz.

1. LOS ANTECEDENTES GRIEGOS.

La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales y la inquietud que introdujeron en el mundo griego las paradojas de Zenón de Elea, precipitó una profunda crisis de fundamentos en la Matemática que trajo consigo el "horror al infinito". Con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables las magnitudes geométricas ya no podían ser medidas mediante números, por lo que quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones. Para conjurar la crisis de fundamentos había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional. Eudoxo de Cnido, de la escuela platónica, resolvió de forma brillante la antinomia radical entre finito e infinito. Introduciendo el concepto de "tan pequeño como se quiera", equivalente a nuestro proceso de "paso al límite", encuentra de forma provisional, con su teoría de magnitudes, una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios: una definición (*igualdad de razones*), un axioma (*axioma de Eudoxo- Arquímedes o axioma de continuidad*) y un método (*el método de exhaución*). La solución de Eudoxo fue un magnífico éxito científico, pero trajo como secuela que la filosofía platónica impusiera el rigor lógico como supremo valor, lo que cristalizaría en la sistematización axiomático-deductiva de la Geometría griega

elemental en la compilación enciclopédica de "**Los Elementos**" de Euclides, estableciendo un severo modelo de exposición y demostración en Geometría que presidirá casi toda la producción matemática griega posterior, o por lo menos la que nos ha llegado en los grandes tratados clásicos.

En manos de Arquímedes el método de exhaución, conjugado con su genial y heurístico método mecánico de descubrimiento ("*método de la palanca*", que Arquímedes describe en su obra "**El método relativo a los teoremas mecánicos**"), se convierte en un poderoso instrumento infinitesimal rigurosamente lógico que le permite alumbrar intuitivamente y convalidar apodícticamente numerosos resultados sobre cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad, que hoy obtenemos con nuestros perfeccionados y rigurosos algoritmos infinitesimales, y con los que Arquímedes, trascendiendo "**Los Elementos**" de Euclides, amplió de forma considerable el acervo matemático de su época.

Pero el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo cercena considerablemente las posibilidades de expresión y oculta la vía del descubrimiento: el "*ars inveniendi*" de Galileo, quedando de manifiesto en exclusiva la vía apodíctica: el "*ars disserendi*". El Análisis geométrico griego (que Proclo atribuye a Hipócrates de Quíos, aunque es descrito por Platón en "**La República**" y por Pappus en la "**Colección Matemática**") era una fecunda heurística geométrica, el instrumento fundamental de investigación y creación matemática; pero, alcanzada tras el Análisis la Síntesis, en presencia de la demostración sintética cualquier Análisis era superfluo y como tal se suprimía de los grandes tratados. De esta forma, los griegos ocultaban la forma y el camino utilizados en la obtención de sus magníficos resultados matemáticos. Esto sucede en las grandes obras clásicas como "**Los Elementos**" de Euclides o "**Las Cónicas**" de Apolonio y también en las obras de Arquímedes, que no dan ni la más ligera indicación de cómo se habían descubierto los magníficos resultados que describen.

Los matemáticos de los siglos XVI y XVII acogen con fruición y entusiasmo las obras clásicas, que ahora estaban a su disposición, pero preocupados porque el estilo sintético de exposición de la Geometría griega, y en particular de las obras de Arquímedes, privaba a los investigadores de la forma en que habían sido descubiertos los resultados, todos los matemáticos manifiestan, junto a su admiración, una cierta perplejidad y extrañeza, ante la lectura de los clásicos. Quizá es Descartes el que con mayor claridad denuncia (en la regla IV de las **"Reglas para la dirección del espíritu"**) la insatisfacción de una curiosidad frustrada por la ocultación de los métodos de descubrimiento de la Geometría griega.

Hay dos honorables excepciones que son, por una parte, Arquímedes con su obra **"El Método"** (donde describe los procedimientos mecánicos que le condujeron a sus brillantes descubrimientos), que aunque perdida hasta 1906, actuó sin duda como variable oculta, y por otra, Pappus con el llamado **"Tesoro del Análisis"** del Libro VII de **"La Colección Matemática"**, donde se reproduce parte de la Geometría griega anterior, pero de una forma que se patentiza el camino que sigue la investigación matemática. Desgraciadamente la obra de Pappus fue ignorada o desconocida por los escritores árabes, intermediarios en el tránsito a occidente de la cultura clásica griega, permaneciendo oculta en manuscritos griegos originales que vieron de nuevo la luz en los siglos XVI y XVII, bajo el nuevo espíritu humanista de Commandino, Vieta, Fermat y otros muchos, que se propusieron la traducción, recuperación y restauración de las obras antiguas. Estos dos matemáticos griegos, Arquímedes y Pappus, son los únicos en toda la Geometría griega que dan a conocer la vía heurística de los descubrimientos, vía analítica en el caso de Pappus y también vía mecánica en el de Arquímedes.

2. NATURALEZA DEL CÁLCULO DEL SIGLO XVII.

La Matemática del siglo XVII presenta una inflexión radical respecto a la Matemática clásica griega. El paradigma estilístico y demostrativo que impuso la filosofía platónica, cuyo exponente más representativo es la obra de Euclides **"Los Elementos"**, es violado por el principio de que lo que importa es la consecución de nuevos resultados, aunque sea sin expresión rigurosa. Se trata de crear y descubrir, se impone el lema "primero inventar, después demostrar".

La Matemática griega es ponderada por su alto

grado de rigor y es la fuente de formación y de inspiración de los matemáticos, pero se abandonan y critican sus métodos porque no son heurísticos. En efecto, el camuflaje permanente del infinito convierte a casi toda la Matemática griega en Geometría y el tratamiento absolutamente riguroso de los problemas infinitesimales requiere un subterfugio: "el método de exhaustión" de Eudoxo, que obliga a tratar cada problema de forma particular, dependiendo de su estructura geométrica concreta, además de precisar un método complementario para prever los resultados. Por eso en el siglo XVII, tras la recuperación, reconstrucción, divulgación y asimilación del legado clásico, se impuso un nuevo clima psicológico y una nueva actitud hacia los problemas matemáticos, que permitió el desarrollo de multitud de nuevas técnicas infinitesimales, ya que era general el deseo de encontrar nuevos métodos para resolver rápidamente los problemas que las nuevas condiciones sociales planteaban, métodos que permitieran obtener de forma directa los resultados, aunque hubiera que echar por la borda el rigor.

Las especulaciones de la Escolástica medieval sobre el infinito y el continuo propiciaron que los matemáticos posteriores no fueran refractarios a la utilización de las técnicas infinitesimales. El Álgebra simbólica de Vieta y Descartes aplicado al material del Análisis geométrico recuperado de los antiguos, facilitó el desarrollo de técnicas formales que permitieron métodos de rápido descubrimiento más que demostraciones rigurosas. Finalmente la representación algebraica de curvas, vía la Geometría Analítica de Fermat y Descartes, propició la rápida y sencilla formulación para la investigación de multitud de problemas de áreas, volúmenes, rectificación, centros de gravedad, tangentes, máximos y mínimos, etc.

Con esta rica miscelánea de ingredientes matemáticos (problemas arquimedianos, técnicas algebraicas de Cálculo, Geometría Analítica y sobre todo el libre uso del concepto intuitivo de infinito), el siglo XVII produjo una impresionante profusión de nuevos resultados, a base de nuevas técnicas y métodos infinitesimales, que provocaron una progresiva aritmetización de problemas que en la antigüedad habían tenido un enfoque estrictamente geométrico.

En particular, respecto del Cálculo Infinitesimal, se abre al comienzo del siglo XVII una etapa empírica, que cubre los dos primeros tercios de este siglo, en los que manejando unos elementos con un estatuto ontológico no muy bien definido (indivisibles, infinitamente pequeños, incrementos evanescentes, cantidades despreciables, etc), se

desarrollan multitud de técnicas y métodos infinitesimales, que contribuyen a resolver de forma sorprendente antiguos y nuevos problemas, bajo la acción de profundas intuiciones, que supliendo la falta de rigor, evitan las contradicciones y el absurdo donde podía haber llevado tanto desenfreno conceptual, y que conducen, bajo una visión de generalización y unificación, a la destilación de un algoritmo universal, al descubrimiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Bajo esta perspectiva, resulta que los matemáticos que desarrollaron el germen del Cálculo Integral, habiendo bebido en las fuentes de los grandes tratados conocidos de Arquímedes, (que ahora tenían a su disposición), donde el método de exhaustión presidía todo el desarrollo con un implacable rigor, al intentar soslayar la rigidez de la exhaustión mediante artificios geométricos que les condujeran a procedimientos heurísticos de rápido descubrimiento, se aproximan de forma sorprendente a la técnica del método mecánico del **"Método"** de Arquímedes. Esto es particularmente cierto en el caso de B.Pascal (que aplica ingeniosamente su "método de la balanza", llamada "balanza de Arquímedes" en los famosos problemas sobre la cicloide), y sobre todo, en el caso de Cavalieri, con sus indivisibles. Aunque el siglo XVII no dispuso del **"Método"** de Arquímedes, el cúmulo de analogías con éste es evidente, lo que hace comprensible el que muchos matemáticos de esta época estuvieran convencidos, de que Arquímedes disponía de un método especial de descubrimiento.

A comienzos del siglo XVII aparecen métodos infinitesimales que modifican y simplifican los métodos de Arquímedes, intentando obviar la necesidad de la doble reducción al absurdo de la exhaustión. Con el uso de los indivisibles y los infinitamente pequeños se resiente el rigor en las demostraciones y van desarrollándose consideraciones sobre límites basadas en la incipiente Teoría de Números.

Para Cavalieri un área estaba formado por un número infinito de líneas paralelas o indivisibles, que al sumarlos con los recursos algebraicos de que disponía, podía, por una parte, ratificar los resultados clásicos (lo que daría seguridad a su método), y por otra, obtener cuadraturas y cubaturas no conocidas por los antiguos. Sorprende la estrecha analogía entre el "Método de los indivisibles" y el "Método mecánico" de Arquímedes. Pero Arquímedes tenía muy claro y así lo manifiesta en el preámbulo del **"Método"** que "la investigación obtenida por este método no implica verdadera demostración", por eso ha de

confirmar rigurosamente lo que descubre mediante el método de exhaustión. La analogía está en la primera etapa de la creación, pues desde luego Cavalieri ya no necesita recurrir al recurso de la palanca para sumar sus indivisibles, el Algebra le facilita esta operación y proporciona unas posibilidades de generalización imposibles de lograr con la Geometría griega.

El excesivo abuso de la intuición inmediata de las magnitudes geométricas y la violación del principio de homogeneidad espacial dimensional con los indivisibles, provocaba que no hubiera en el ambiente matemático un consenso acerca del valor demostrativo de los métodos utilizados. Algunos concebían el método de los indivisibles como simplemente heurístico y creían necesaria una demostración por exhaustión (punto de vista arquimedianos). En general se consideraba que los resultados obtenidos mediante indivisibles podían justificarse fácilmente con la exhaustión, pero no era necesario porque concebían el nuevo método inventivo no más que como un lenguaje diferente, un estilo distinto de expresar unos mismos conceptos. Saben que los resultados son correctos porque saben y pueden probarlos rigurosamente mediante los métodos de Arquímedes. Vamos a reproducir algunas frases representativas de lo que se acaba de exponer:

J.KEPLER (**Nova stereometria doliorum vinariorum**" de 1615):

"[...]Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos."

P.FERMAT (**De aequationum localium....in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis [Tratado sobre cuadratura]** de 1658):

"[...]Basta hacer esta observación [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] una vez para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras., Así alcanzamos la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.[...]."

B.CAVALLIERI (**Geometría Indivisibilibus continuorum**) de 1635:

"[...] Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo."

B.PASCAL (**Lettre à Carcavi.**):

"[...] He querido hacer esta advertencia para mostrar que todo lo que está demostrado por las verdaderas reglas de los indivisibles, se

demostrará también con el rigor y a la manera de los antiguos [como Arquímedes]: y que así ambos métodos no difieren más que en la manera de hablar."

I. BARROW (*Lectiones Geometricae* de 1670):
"[...]. Se podría alargar mediante un discurso apagógico [mediante la doble reducción al absurdo del método de exhaustión], pero ¿para qué? "

J. WALLIS (*Arithmetica infinitorum* de 1656):
"[...]. Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico de figuras inscritas y circunscritas, lo que es supérfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba."

C. HUYGENS (*Horologium oscillatorium* de 1673):
"[...]. No es de gran interés el que demos una demostración absoluta, después de haber visto que una perfecta demostración puede ser dada. Concedo que debería aparecer en una forma clara, ingeniosa y elegante, como en todos los trabajos de Arquímedes. Pero lo primero y más importante es el método de descubrimiento mismo."

Las frases transcritas son muy significativas para comprender la enorme influencia de Arquímedes sobre los matemáticos del siglo XVII, pero sirven sobre todo para mostrar la primacía de la argumentación heurística sobre la apodíctica, de la ponderación del método de descubrimiento por encima de la expresión rigurosa.

El método de lo indivisibles recibió acerbias críticas dirigidas contra su propia naturaleza, debido al problema que plantean sobre la estructura del continuo, toda vez que contradecían la doctrina aristotélica del continuo, como divisible en partes del mismo tipo que la magnitud original, divisibles de nuevo indefinidamente. Por eso Fermat, Roberval, Wallis y otros, recogen estas críticas e intentan modificar los procedimientos de Cavalieri, para evitar los errores de dimensionalidad, manifestando que no se toman segmentos para la suma de todas las ordenadas, sino rectángulos de anchura infinitesimal, "infinitésimales", lo que desde el punto de vista del rigor no representa un gran progreso, pero salva, mejor que peor, la homogeneidad. Con ello se abre la segunda etapa del Cálculo Infinitesimal, sustituyendo los "indivisibles" por los "infinitamente pequeños" de igual dimensión geométrica espacial que la figura a la que pertenecen. Como no se sabe muy bien

lo que es una magnitud infinitesimal ni lo que debe entenderse por una suma de infinitos sumandos, el rigor brilla por su ausencia, pero como contrapartida la fecundidad de los nuevos métodos fue asombrosa.

3. ANALISIS TEMATICO DEL CALCULO DEL SIGLO XVII ANTERIOR A NEWTON Y LEIBNIZ

El Cálculo del siglo XVII estuvo esencialmente vinculado a la investigación sobre curvas. Se insistió inicialmente en las curvas conocidas por los griegos (las cónicas de Menecmo y Apolonio, la cuadratriz de Dinostrato, la conoide de Nicomedes, la cisoide de Diocles, la hippopede de Eudoxo, la espiral de Arquímedes, etc), pero en seguida esta colección se vio complementada por multitud de nuevas curvas, entre las que sobresalen "las parábolas, hipérbolas y espirales generalizadas o de orden superior" (llamadas de Fermat), "el caracol de Pascal", "el folium de Descartes", "la curva de Lamé", "la espiral logarítmica", "la kappa-curva", "la curva tangencial", y ante todo la reina de todas las curvas: "la cicloide".

Contrariamente al punto de vista estático que fue casi exclusivo (salvo quizá en el estudio de la espiral de Arquímedes) en el tratamiento de las curvas en Grecia, en el siglo XVII se abre paso en seguida el punto de vista cinemático, de manera que desde el principio los problemas de diferenciación se presentan no sólo a propósito de tangentes sino también de velocidades. Particularmente el estudio de la espiral logarítmica y de la cicloide contribuye a la simbiosis de los métodos geométricos con los cinemáticos. En efecto, una curva se puede considerar como "la trayectoria de un punto en movimiento" y la tangente como la recta que "pasa por dos posiciones consecutivas". El principio de la composición de movimientos y más precisamente de la composición de velocidades permite a Torricelli, Roberval y otros, disponer de un método general de obtención de tangentes, para curvas que se pueden definir cinemáticamente.

Y todo ello a pesar de Descartes que trataba desdeñosamente de "mecánicas" a las curvas no algebraicas, y pretendía su exclusión de la Geometría. Para curvas algebraicas, Descartes da un método de obtención de tangentes, basado en consideraciones sobre raíces dobles, bajo un punto de vista en absoluto diferencial, independiente del concepto de límite y que es el de la Geometría Algebraica. Algoritmos formales pseudo-diferenciales fueron desarrollados para facilitar la obtención de las raíces dobles del método de Descartes con la regla de Hudde y adelantando la derivación implícita de funciones

algebraicas con la regla de Sluse.

Pero no es ésta la forma imperante de pensar y hacer. En efecto, los métodos algebraicos sufrirán un cierto eclipse, absorbidos de forma provisional por los métodos cinemático-diferenciales de Roberval, Fermat y Barrow. Se defiende que las curvas definidas cinemáticamente son como las demás, no hay por qué hacer distinción, todas pueden estudiarse por los mismos métodos. La variable "tiempo" en los trabajos de Barrow se convierte en una variable independiente universal de la que dependerá la variación simultánea de varias magnitudes, como base de un Cálculo Infinitesimal de tendencia geométrica, ideas que son el punto de partida de Newton, para quien sus "fluyentes" son las distintas magnitudes funciones de un tiempo, que es un parámetro universal, mientras sus "fluxiones" son las "derivadas" respecto al tiempo, lo que supone la culminación de los métodos cinemáticos.

Otro aspecto decisivo del Cálculo del siglo XVII es que se empieza a intentar una clasificación de los problemas. Los problemas de diferenciación aparecen bajo tres aspectos: velocidades, tangentes y máximos y mínimos. Fermat unifica los tres aspectos e inicia el argumento diferencial de "incrementar la variable independiente" y valorando el correspondiente incremento de la función considerar por primera vez (aunque manteniéndose en el terreno de lo operativo y algebraico) el cociente incremental que definirá la primera derivada. Por ello Laplace y la mayor parte de los matemáticos franceses consideran a Fermat como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Coordinados los aspectos vinculados a la primera derivada, hay que decir que los relativos a la segunda derivada tardarán bastante más en unificarse, lo que llevará a cabo Huygens a propósito de las evolutas y del radio de curvatura de una curva.

Respecto al Cálculo Integral se estudiaban desde la época clásica griega, los problemas de cuadraturas, cubaturas y centros de gravedad. El siglo XVII ampliará considerablemente el número de cuadraturas y cubaturas en relación con la ingente cantidad de nuevas curvas que se definen, añade la rectificación de curvas y el cálculo de superficies de revolución (en la antigüedad sólo Arquímedes había tratado los casos particulares de la rectificación de la circunferencia en "**Sobre la medida del círculo**" y la superficie de la esfera en "**Sobre la esfera y el cilindro**"). Se emprendería una clasificación de los problemas según la naturaleza de la "integral subyacente". Para áreas y volúmenes el paso fundamental lo da Cavalieri con sus

indivisibles, donde reconoce que muchos de los problemas resueltos por Arquímedes se reducen a la cuadratura de x^n , para $n=1,2$. Sigue inmediatamente el intento de generalizar la cuadratura de Cavalieri para n racional distinto de -1 (para $n=-1$, la llamada cuadratura de la hipérbola de Apolonio se tardaría bastante más tiempo en resolver), con una profusión de brillantes resultados sobre cuadraturas de hipérbolas y parábolas generalizadas, algunas obtenidas por indivisibles o infinitesimales, (Roberval, Pascal,...), otras mediante cuadraturas aritméticas (que se basarían en el modelo de la cuadratura de la espiral por Arquímedes) por medio de diversas fórmulas para la suma de las potencias de los primeros enteros obtenidas por consideraciones sobre números poligonales (Fermat) o sobre el triángulo aritmético (Pascal); otras obtenidas empíricamente a base de una buena dosis de inducción incompleta (Wallis) y otras por originales métodos como el de la progresión geométrica de Fermat.

De esta forma todos los problemas sobre áreas y volúmenes podían reducirse a cuadraturas. Dos problemas se consideraban equivalentes cuando dependían de la misma cuadratura. Por ejemplo Cavalieri demuestra que el problema del volumen de la pirámide y el de la cuadratura de la parábola son equivalentes porque ambos dependen de la cuadratura de x^2 . Se disponía por tanto de una forma de clasificar los problemas según el grado de la dificultad de la cuadratura a que daban lugar.

Si a ésto le añadimos que tanto Pascal como Barrow, obtienen mediante consideraciones geométricas resultados asimilables a los métodos de integración por partes e integración por cambios de variable, resulta que los matemáticos del momento pueden resolver ya infinidad de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Todo ello al inmenso precio de dar la espalda al pasado y aceptar el buscar la justificación de los métodos nuevos en la fecundidad de los resultados y no en el argumento riguroso.

Pero todavía quedaban por resolver los arduos problemas de la cuadratura del círculo y de la hipérbola de Apolonio, a lo que se enfocan ciertos trabajos de Saint-Vincent, Mercator, Wallis, Gregory y Newton, mediante procedimientos de interpolación indefinida de funciones circulares y logarítmicas, que pronto darán lugar con Newton y Leibniz a los métodos generales de desarrollo en serie. Entre los algoritmos infinitos obtenidos sobresalen los sensacionales descubrimientos de la serie de Mercator para el logaritmo en relación con la cuadratura de la hipérbola:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

así como el desarrollo de Wallis de $\pi/2$ en producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots$$

y el desarrollo de la serie binomial de Newton:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 \dots$$

ambos en relación con la cuadratura del círculo.

Los problemas de la rectificación de curvas se resolvieron más tardíamente. Históricamente la primera curva rectificada después del círculo fué la espiral logarítmica (llamada por Torricelli "espiral geométrica para distinguirla de la espiral de Arquímedes, que sería la "espiral aritmética"). El problema fue resuelto por medios cinemáticos hacia 1640 por Roberval y Torricelli. Neil resuelve hacia 1658 la rectificación de la parábola semi-cúbica $kx^2=y^3$, llamada "parábola de Neil", mientras Roberval y Wren consiguen rectificar la cicloide hacia 1659. Por las mismas fechas Pascal obtiene la igualdad de la longitud de la espiral de Arquímedes con la de una parábola (Egalité des lignes spirale et parabolique de "Les Lettres de A. de Dettonville"). Respondiendo a estos éxitos de Wren y Pascal, Fermat escribe hacia 1659 un tratado general sobre rectificación ("**De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geometrica**") en el que aplicando el material desarrollado en sus cuadraturas y con base en la parábola de Neil obtiene la rectificación de una familia infinita de curvas. Varios matemáticos reducen la rectificación de la parábola a la cuadratura de la hipérbola, ejemplo importante porque aparece como caso particular según el cual la rectificación de la curva $y=f(x)$ se corresponde con la cuadratura de la curva $y=[1+f'(x)^2]^{1/2}$, de manera que el problema de la rectificación forma una transición geométrica natural entre la diferenciación que presupone y la integración a la que se reduce, contribuyendo a vincular así los dos tipos fundamentales de problemas del Cálculo: las tangentes y las cuadraturas.

Precisamente el descubrimiento de que tales problemas, las cuadraturas y las tangentes, son en cierto modo inversos uno del otro, cuestión vislumbrada por Barrow (aunque el abstruso lenguaje geométrico-sintético que utiliza le

impidió advertir que había descubierto el nudo gordiano del Cálculo Infinitesimal, el instrumento esencial para realizar las cuadraturas vía la operación inversa de cálculo de la tangente, es decir la antiderivación), en la mente de Newton y Leibniz fraguó de tal forma, que constituyó un componente esencial, en la sistematización del Cálculo por ambos, destilando de la rica miscelánea de técnicas infinitesimales anteriores un poderoso algoritmo instrumental para el cálculo sistemático de áreas y tangentes.

4. CONCLUSIONES.

Se ha descrito la naturaleza y los problemas más representativos de la etapa empírica del Cálculo Infinitesimal. En ella se ha dilapidado en general el rigor impecable de la exhaución griega, pero se han ingeniado magníficos métodos heurísticos de rápido descubrimiento.

A partir de aquí se plantea históricamente la necesidad de dos hechos fundamentales: a) la generalización y unificación de los problemas y métodos infinitesimales, es decir la elaboración de un algoritmo aplicable a todos los problemas y b) la reformulación sobre bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal. La parte a) es lo que llamamos el descubrimiento final del Cálculo por Newton y Leibniz. La parte b) es la puesta en orden lógico del Cálculo, que realiza Cauchy y sus continuadores, la llamada Aritmetización del Análisis.

Puede decirse que el Cálculo anterior a Newton y Leibniz es una ingente casuística de métodos heurísticos, aplicados a problemas geométricos específicos, que se resuelven mediante técnicas ad hoc, obteniéndose multitud de resultados particulares que, al traducirlos al lenguaje moderno, muestran los conceptos esenciales del Cálculo, que del alguna manera yacían en ellos, pero de forma tan fragmentaria que sólo se referían a problemas individuales y no a teorías generales. Pero la perspectiva de generalización estaba implícita en esos métodos. Si no se acertó a encontrar la técnica algorítmica general bastante tuvo que ver en ello el lenguaje matemático al uso, todavía primitivo, que se utilizaba. El gran acierto de Leibniz es precisamente la elaboración de una notación especialmente afortunada, tan identificada con los propios conceptos y tan significativamente definitiva, que, a veces, nos resulta inevitable utilizarla, anacrónicamente, para exponer los resultados infinitesimales de sus predecesores. Su virtuosismo en la creación del simbolismo le permitiría traducir en fórmulas los resultados y en algoritmos los métodos, tanto los de sus antecesores como los descubiertos por él mismo, lo que a su vez le facilitaría la utilización de los recursos algebraicos para independizar el

discurso matemático de las figuras geométricas y con todo ello reconocer y aislar los conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal, creando un cuerpo de doctrina dotado de algoritmos eficaces, es decir funcionando como un Cálculo operacional que resuelve todos los problemas planteados anteriormente, mediante procedimientos uniformes y con una proyección a nuevos y más complicados problemas, como un potente instrumento de investigación. En palabras del propio Leibniz, se trataba de hacer con las técnicas del Cálculo lo mismo que había hecho Vieta con la Teoría de Ecuaciones y Descartes con la Geometría.

No es fácil delimitar el nivel de contribución de cada matemático al nacimiento del Cálculo Infinitesimal. Mientras ciertas creaciones matemáticas de la época tienen un sello poderosamente individual como la Dinámica de Newton, la Geometría Proyectiva de Desargues, la Teoría de Números de Fermat, en lo que al Cálculo se refiere el descubrimiento se fue fraguando de una forma gradualmente atomizada en lentas transiciones casi imperceptibles mediante la inevitable y sucesiva aparición de nuevos conceptos, métodos y técnicas que un amplio y brillante elenco de matemáticos iban entrelazando entre sí de forma casi inextricable.

A lo largo del recorrido de la etapa empírica del desarrollo del Cálculo anterior a Newton y Leibniz, se van poniendo de manifiesto hechos muy significativos (el incremento de la variable independiente de Fermat y Barrow, el triángulo característico y sus semejantes vinculados a cada punto de la curva, la relación inversa entre cuadraturas y tangentes, etc.) y sobre todo se va abriendo paso lenta y subrepticamente el concepto de límite. Aunque muchos matemáticos aplican intuitivamente nociones muy próximas a las nuestras, contextualizando sus resultados se advierten las dificultades inherentes al ejercicio del pensamiento aritmético en términos de límites, que tan imprescindible se fue manifestando durante dos siglos en la ardua tarea de reconstruir y sistematizar el Análisis, con fundamentos rigurosos.

Como conclusión, Newton y Leibniz, bajo concepciones y métodos infinitesimales diferentes, fueron capaces de separar la ganga geométrica de los resultados de sus antecesores, encontrando el principio general que les permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a un algoritmo universalmente válido, produciendo un cambio sustancial en el tratamiento y resolución de los problemas. Recogiendo todos los componentes de "lo heurístico" de la fase empírica anterior, Newton y Leibniz, sin añadir grandes cotas de

rigor, desarrollan "lo algorítmico" con la fecundidad, coherencia y generalidad de sus diferentes sistemas infinitesimales, abriendo la puerta a "lo riguroso" del Análisis moderno.

5. BIBLIOGRAFIA.

I. OBRAS GENERALES SOBRE HISTORIA DEL CALCULO.

- 1.M.E.BARON:**The Origins of the Infinitesimal Calculus**. London Pergamon, 1969.
- 2.C.B.BOYER:**The History of the Calculus and its conceptual development**. Dover, New York, 1949.
- 3.G.CASTELNUOVO:**Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'era moderna**. N.Zanichelli Editore, Bologna, 1938.
- 4.C.H.EDWARDS:**The Historical Development of the Calculus**. Springer-Verlag, New York, 1979.
- 5.P.M.GONZALEZ URBANEJA:**Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII**. Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- 6.I.GRATTAN-GUINNESS Y OTROS AUTORES:**Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos**. Alianza Universidad, Madrid, 1984.
- 7.O.TOEPLITZ:**The Calculus, a Genetic Approach**. University of Chicago Press, Chicago, 1963.

II. OBRAS GENERALES SOBRE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS.

- 1.C.B.BOYER:**Historia de las Matemáticas**. Alianza Universidad, Madrid, 1986.
- 2.J.P.COLLETTE:**Historia de las Matemáticas**, Siglo XXI, Madrid, 1985.
- 3.E.COLERUS:**Breve historia de las Matemáticas**. Doncel, Madrid, 1972.
- 4.H.EVES:**An Introduction to the History of Mathematics**. CBS College Publishing, New York, 1983.
- 5.M.KLINE:**El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días**. Alianza Universidad, Madrid, 1992.
- 6.J.REY PASTOR y J.-BABINI:**Historia de la Matemática**. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1951. Gedisa, Barcelona 1984.
- 7.D.E.SMITH:**History of Mathematics**, Dover, New York, 1958.

III. OBRAS SOBRE FILOSOFIA DE LA CIENCIA Y DE LAS MATEMATICAS.

- 1.L.BRUNSCHVIG:**Les étapes de la Philosophie Mathématique**. Blanchard, París, 1972.
- 2.R.DESCARTE:**Reglas para la dirección del espíritu**. Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- 3.A.KOIRE:**Estudios de Historia del Pensamiento Científico**. Siglo XXI. Madrid, 1971.
- 4.J de LORENZO:**Introducción al estilo matemático**. Tecnos, Madrid, 1971.
- 5.R.MONDOLFO:**El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica**. EUDEBA, Buenos Aires, 1971.