

4. Lenguaje y Matemáticas

INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN LENGUAJE Y MATEMÁTICAS. TEMAS Y OBJETIVOS

Joaquín Giménez

Dept. Ingeniería Informática. Universitat Rovira i Virgili, Tarragona.

INTRODUCCIÓN .

Desde el momento en que se interpreta la matemática como un lenguaje y se plantea la reflexión didáctica sobre las dificultades de los alumnos, se analizan unas relaciones complejas y un conjunto muy vasto de reflexiones. Se habla del uso de diversos lenguajes, del valor de la expresión verbal, de la interrelación de representaciones, el lenguaje como vehículo de lo comunicativo, etc. El objetivo general de estas líneas es pues, presentar una síntesis de la investigación actual, el tipo de problemas más importantes que se han tratado con algunos de los resultados conocidos.

En otro momento (Giménez 1994c), hemos analizado las investigaciones controladas y las tipificamos en cinco grandes categorías de acuerdo con el nivel de interdisciplinariedad de estos estudios: (1) elementos curriculares o super-estructurales, (2) influencias inter-estructurales en donde se incluye la comunicación (3) de desarrollo e implementación, llamadas también investigaciones funcionales, que incluirán el uso de variables sintácticas, inferencias y elementos semánticos diversos, (4) análisis sub-estructurales, en donde se habla de contexto, epistemología y política y, (5) reflexiones estrictamente teóricas. Esa tipología se centraba en la función de los estudios y no tenía en cuenta una mayor o menor aproximación del papel del lenguaje en el proceso enseñanza-aprendizaje. Así, pues, desde una perspectiva didáctica, vamos a reflexionar ahora sobre los tipos de estudios de interés actual en cuanto sus vinculaciones con los procesos de intervención educativa. Por ello hemos establecido cuatro grupos de trabajos: (1) análisis generales sobre el lenguaje en matemáticas (como representación y comunicación), (2) el lenguaje en el desarrollo de la intervención

educativa (como aspecto generador de conflicto cognitivo, como contexto y como mediador contextual), (3) el lenguaje y la construcción de conocimiento centrada en el alumno (la adquisición de procesos y la regulación de aprendizaje) y (4) trabajos sobre la formación del profesorado.

1. LENGUAJE Y ACCIÓN COMUNICATIVA EN GENERAL.

Llamaremos representacionales aquellos trabajos que acentúan el estudio de criterios de significatividad y significación así como la fuerza y dificultades de las representaciones como factor comunicativo. En efecto, han dejado de ser importantes los estudios analíticos sobre elementos de lenguaje en el currículo, para reconocerse como importantes las reflexiones sobre el lenguaje como representación. El proceso de comunicación se analiza per se, desde perspectivas como el análisis semiótico (Sanz 1994). Otros problemas de interés didáctico son ahora: los análisis de sistemas de representaciones usados en Matemáticas, su nivel de significatividad y suficiencia. El gran tema de las representaciones externas implica (Janvier & Vergnaud 1994) el análisis de situaciones externas estructuradas de tipo físico, o simbólico (sistemas lingüísticos, notaciones matemáticas formales). Por otra parte, en cuanto la construcción interna de sistemas de representación (Denis 1991) y significado, se analizan las incorporaciones individuales de las ideas matemáticas. Con todo ello, se encuentran los problemas de interpretación y en general de cambios representacionales (Janvier 1987) y el papel de la imaginación (Dreyfus 1994).

2. LENGUAJE E INTERVENCIÓN EDUCATIVA.

Una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la

actividad matemática. De ahí que a las investigaciones sobre elementos y dificultades en el desarrollo e implementación en el aula, las llamásemos funcionales. Las variables que usualmente se consideran en ese tipo de estudios son: (a) sintácticas (tipos de lenguaje en matemáticas: verbal, escrito, algebraico, gráfico, de computación,...), (b) inferenciales, que incluye las que algunos llaman pragmáticas y, (c) semánticas con las consiguientes relaciones epistemológicas. Una descripción del trabajo hasta los 90 se encuentra en Giménez (1994) en donde se menciona una vasta bibliografía sobre el tema. Una colección de actividades e investigaciones se encuentra en el número monográfico 16 de la revista SUMA.

El análisis sintáctico contiene estudios sobre palabras y expresiones, dificultades de elementos relacionales lógicos, elementos de estandarización y anclaje conceptual explicado por factores sintácticos, etc. En otros casos se trata de observar *variables de la representación* e influencias negativas de las secuencias verbales. Ahí se han forjado términos como "colas verbales y perceptuales". En estos estudios se constata como los alumnos se dejan llevar por esas percepciones para no desarrollar los conceptos. Como pragmáticos se consideran los *procesos de construcción conceptual*. Así, el análisis de preconcepciones de los estudiantes tiene un tratamiento vinculado a elementos de lenguaje que no siempre puede ser considerado de naturaleza sintáctica o semántica. Merecen citarse también en este bloque los análisis sobre las *dificultades* de algunos alumnos con problemas específicos de lenguaje *en la interacción* en el aula (sordos, discapacitados, etc), y las búsquedas sobre los llamados vacíos de experiencia ("lack of experience") que promueven conflictos o contradicciones basados en problemas de tipo textual, que nacen de situaciones de interacciones y aprehensión de la realidad. El contenido semántico se ha observado no sólo estructuralmente sino en la necesidad de significado, estructuras subyacentes en la construcción de representaciones y significados, etc.

Lenguaje y conflicto cognitivo.

Algunos estudios sobre aprendizaje en el aula observan el papel del lenguaje en cuanto estudio de superación de distractores, intervención y uso de representaciones en el proceso de matematización (Sreefland 1991), etc. Con ello el uso de lenguaje es fuente de conflicto cognitivo. En otros análisis, el lenguaje se describe como

obstáculo (Silva 1994). Ahí se encuentra el análisis de la introspección (Mason 1994).

Otro tipo de trabajos se refiere a lenguajes propios de la matemática. En el caso del álgebra se analizan errores representativos (Cortés 1994) y la producción de significado (Lins 1993). El lenguaje gráfico se analiza específicamente en muchos trabajos (MJLuelmo 1995). Si bien desaparece un interés marcado por el análisis de variables centradas en los resultados del rendimiento, algunos trabajos sobre la evaluación de lo comunicativo en cuanto control del error, pasan a ser importantes.

Lenguaje y contexto.

Otro aspecto importante en el desarrollo de aprendizaje es el contextual. El análisis de la ostensividad por encima de la representatividad es la reflexión amplia que surge en el marco de la teoría de situaciones así como de la antropología didáctica (Chevallard 1992, Bosch 1994). En esa visión paradigmática, los elementos representacionales se analizan siempre como variables intervinientes (Steinbring 1988). Se observan problemas como la generabilidad, conveniencia, oportunidad, etc de determinadas representaciones. Por otra parte el valor del lenguaje como contexto y no sólo como representación lleva a considerarlo como clave en procesos de producción. En investigaciones de este tipo, se analiza el tipo de lenguaje (Maier 1994), su nivel de profundidad, etc como parte del análisis de la producción de conocimiento. Ello sigue manteniendo un carácter inter-estructural, pues los análisis se producen no sólo al interior de la búsqueda de lo matemático o lo lingüístico sino como interacción entre ambos.

El Lenguaje como mediación contextual.

Llamaremos ahora análisis interactivos a los trabajos que contribuyen claramente a relacionar el lenguaje con procesos de socialización externos al individuo y a la propia matemática. Con ellos se están definiendo cambios de perspectiva y se han abierto diversas vías de trabajo. La verbalización, asociada al marco de los procesos de aprendizaje, como una "red de vehiculación de presentación" está acentuando lo conductual, y el papel del lenguaje como elemento de socialización está cobrando interés.

La expresión contexto incluye aquí no sólo la interpretación individual de situaciones, sino también expectativas y obligaciones. Las interacciones usuales en que el contexto se

manifiesta es la diferenciación de roles profesor-alumno en el diálogo de aula. El primero asume la reconducción y elabora descripciones en beneficio de otros, de tal forma que el alumno sólo interpreta la situación como simple suceso social (Yackel & Cobb 1993). En ese sentido, la expresión verbal es fundamental aunque el formato y las situaciones son elementos de dificultad que afectan a los conceptos. El lenguaje hablado se manifiesta de forma diferente según el papel de los interlocutores: (a) discurso exploratorio, en donde la planificación es lo importante (b) hablar para uno mismo, reflexionando y organizando, (c) hablar para los demás centrado en la comunicación y (d) discusión en grupo, reconceptualizando y reorganizando. En ese sentido, Yackel ha mostrado que "la interpretación de una situación, las percepciones, expectativas y obligaciones, son más determinantes de la naturaleza de un discurso que la participación individual en tareas de clase o discusión en pequeño grupo". Se observan variables como el diálogo y la cooperación (Yackel & Cobb 1993) centradas en los estudiantes, etc. El lenguaje es usado así, desde un nuevo status epistemológico para controlar la producción de significados en cuanto creación de una comunidad matemática (Civil 1994) que construye conocimiento.

Siguen siendo importantes las investigaciones de tipo etnográfico que relacionan lenguajes naturales y lenguaje matemático. En efecto es importante un análisis de lenguaje en situaciones fuera del aula (Civil 1994, entre otros), análisis del potencial didáctico de microproyectos sobre artesanía (Oliveras 1995), niveles de interpretación gráfica (Giménez 1994b), etc. Están dejando de ser importantes los estudios de tipo socio-lingüístico.

3. LENGUAJE Y PROCESOS DEL ALUMNO. NUEVOS CONTENIDOS EPISTÉMICOS

¿Existe una diferenciación entre un "lenguaje de razonar" y "lenguas para comunicar? ¿Hasta qué punto los problemas terminológicos, y de uso del lenguaje natural manifiestan dicha diferenciación? ¿Qué influencias hay entre ellos y los procesos reflexivos? Diversas investigaciones se centran en el papel del lenguaje en la modelización, el uso del lenguaje natural, el requerimiento estructural, la demostración o adquisición de habilidades de alto nivel, el papel de la visualización (Dreyfus 1994), etc.

El lenguaje es un vehículo de análisis histórico-lingüístico con contenido epistemológico

(Chevallard 1991), que en muchos casos forma parte de una reflexión más amplia sobre la consecución de conceptos. Se dan en la historia diferentes dimensiones y usos de lenguaje. En todos ellos la metáfora juega un papel importante. Así, algo es transferido a otro al que no se le aplica normalmente. El análisis del contraste entre el ábacista y el algorítmico en la época medieval es un paradigma claro del uso metafórico que diversos autores han revelado. En esas concepciones se basa el proceso llamado de matematización.

El proceso de generalización es uno de los elementos en los que se refleja la acción lingüística, no sólo con el uso de palabras, referentes y metáforas, sino con metonimias. Es decir, algo es referido a otro por el nombre o algún aspecto o atributo de él como cuando se dice "la raíz cuadrada de -1 es "un número imaginario". La discusión teórica refleja diversos niveles de lenguaje desde el natural al simbólico. Ello se ejemplifica adecuadamente en el caso de las fracciones en nuestro artículo sobre la descripción (Giménez 1994). Kieren (1988) explica como se usa esos diversos niveles de lenguaje para la construcción de conocimiento. La visión de recursividad (vuelta atrás en la reflexión) de autores como Maturana y Kilpatrick implica los procesos de evaluación y validación, así como la progresión de lo axiomático a lo particular es el énfasis fundamental de los trabajos de Hilbert y Bateson.

Lenguaje y regulación del aprendizaje.

En la construcción de muchos conocimientos tales como los que se dan en tareas de generalización, los estudiantes no usan lenguajes "oficiales" de las matemáticas, sino más bien el lenguaje natural (Laborde 1990). El lenguaje es un medio de regulación y control de la actividad y del pensamiento (Vigotsky 1962). Pero, ¿cómo se establece el paso entre diversos tipos de lenguaje? ¿Sabemos que los problemas de lenguaje son parte clave de los procesos de comunicación (Laborde et al 1989), pero ¿cómo gestionar esos elementos en la formación de conceptos?

En los últimos años, el análisis de interacciones y socialización da lugar a nuevos análisis que se centran en el propio proceso enseñanza-aprendizaje (Durkin 1991) como un proceso de regulación. Se supera así una simple perspectiva funcional en el sentido que todos los estudios coinciden en la importancia que la verbalización tiene para el desarrollo constructivo general de aprendizaje de códigos aritméticos,

códigos geométricos ,etc.

¿Qué tipo de interacciones verbales (o mediante otros "lenguajes") facilitan el aprendizaje? ¿Qué tipos de problemas abren al estudiante a un uso amplio de diversos lenguajes? ¿Las actividades sintetizadoras y organizadoras hasta dónde permiten regular y autocontrolar el aprendizaje? ¿Qué consecuencias tiene respecto una mejora en la autoevaluación? Esas son algunas de las preguntas abiertas en este tema.

4. LENGUAJE Y EL PROFESOR. REPRESENTACIONES Y PROFESIONALIDAD.

Conocer los procesos de lenguaje que intervienen en la socialización y sus influencias sobre la construcción de conocimiento son parte de la formación del profesor de matemáticas. Por otra parte es importante que el profesor reconozca el valor social que el lenguaje matemático tiene en la actualidad en cuanto es un vehículo de la tecnología actual. ¿En qué consiste este nuevo papel instrumental ? ¿Qué debe ser conocido por el profesor?

Así, en la gestión del profesor se pueden discutir usos de lenguaje como: procesos de descripción (Giménez 1994), explicitación del componente tecnológico (Keitel 1994) y gestión de la producción (Boero 1995), etc. El lenguaje se convierte en el vehículo clave para conseguir una concientización y progreso en el uso de representaciones y reconocimiento de las relaciones que los estudiantes establecen sobre ellas (Llinares y Sanchez 1995).

Por otra parte, en la construcción conceptual implícita en lo dicho anteriormente, hay una dimensión de poder , si se admite que debemos partir de un conocimiento extra-escolar de la vida que sobrepase lo estrictamente técnico. Así, el conocimiento del lenguaje matemático es para algunos autores un proceso de adecuación (Knijnik 1993) y no tiene por qué ser explícitamente un proceso de institucionalización que parta de un planteamiento epistemológico distinto (Chevallard 1991). La discusión de los usos de lenguaje en ese sentido es importante en la construcción de un conocimiento institucionalizado y a buen seguro se darán en los próximos años más reflexiones sobre las relaciones entre usos de lenguaje y las concepciones políticas .

5. REFLEXIONES CURRICULARES A MODO DE CONCLUSIÓN.

Hemos recuperado a lo largo de esta revisión el reconocimiento didáctico de distintos tipos de investigaciones: análisis generales sobre el lenguaje en matemáticas (como representación y comunicación), el lenguaje en el desarrollo de la intervención educativa (como aspecto generador de conflicto cognitivo, como contexto y como mediador contextual), el lenguaje y la construcción de conocimiento centrada en el alumno (la adquisición de procesos y la regulación de aprendizaje) y trabajos en la formación del profesorado.

Nadie pone en duda la necesidad de un mayor número de investigaciones en todos esos campos, pero nos atreveremos a proponer algunas conclusiones como resumen de los distintos trabajos realizados. En efecto, en cuanto la valoración general del lenguaje en la educación matemática se pone de manifiesto la importancia de :

a) Reconocer el valor curricular de nuestro DCB y adaptaciones autonómicas en cuanto transmitir el valor e importancia de tratar el paso del lenguaje natural a los diversos tipos de lenguajes en la educación matemática básica de los individuos. Nos parece que dichas formulaciones son más profundas que las propias aportaciones de los Standards. Además de promocionar dichas ideas, se requiere investigar más sobre las diferencias entre los "usos" de los diversos lenguajes y sus relaciones; implicaciones positivas o no de un uso más amplio del lenguaje natural para iniciar determinado trabajo. En ese sentido, lo ya conocido sobre el valor del lenguaje no debe aplicarse a la expresión verbal sino a todo símbolo visual para: comprender, recordar, representar, comunicar, construir, generar y facilitar la creatividad, y reflexionar sobre lo ya realizado.

Consideramos que sería importante que los análisis estructurales (propios de la década pasada) se centraran más en su integración en el proceso de aula, más que análisis estáticos de un momento determinado. Así, aunque deben realizarse análisis de resultados de las aplicaciones curriculares, no deberían ser el centro de atención focal en los próximos años. En todo caso, precisamos reconocer las influencias que hay en cuanto "saber de esos análisis" para la formación del profesor.

b) Valorar-como hacen los análisis recientes de la construcción de conocimiento matemático-el uso de metáforas y metonimias como imágenes de situaciones. Pero queda mucho por ver qué tipo

de imágenes es el más adecuado para diversos elementos conceptuales. A ese respecto, pensamos que los estudios epistemológicos - históricos que se están realizando deben influir positivamente en dicha búsqueda y deben incrementarse.

c) Manifestar el valor de los diversos modos de lenguaje no sólo como instrumento funcional de comunicación sino como valor clave del quehacer matemático. En ese sentido reconocer la existencia de muy diversos lenguajes actuales : esquemas, programación, grafos, etc. Debemos reconocer las concepciones de los alumnos sobre dichos lenguajes, su progresivo uso y reconocimiento como potenciales recursos de gran valor comunicativo. También en ese punto precisamos reconocer más la influencia de implementar dichos modos en alumnos jóvenes. ¿Cuándo es el momento adecuado para introducir elementos de grafos ? ¿ Se puede hablar de generar la necesidad del uso de diagramas?

d) Implementar con mayor énfasis actividades de generalización y análisis que no pierdan de vista el elemento comunicativo de lenguaje. Como se ha mostrado, las influencias analizadas han propiciado o remodelado "nuevas teorías sobre la construcción del conocimiento matemático" . Pero, en el campo de lo semántico queda aún mucho por investigar.

e) Reconocer la dimensión social del lenguaje y sus influencias no sólo sobre los elementos conceptuales y procedimentales, sino también actitudinales y de construcción de valores.

f) Saber que en una sociedad marcada por elementos tecnológicos donde la comunicación de masas juega un valor importante, no debe menospreciarse el uso de medios tecnológicos y de comunicación de masas así como el análisis de las implicaciones de los mismos en la educación matemática. Los trabajos de popularización, vídeo, uso de medios informáticos, ¿hasta qué punto influyen en la construcción de conocimiento? Sabemos algunas ventajas en cuanto la capacidad de visualización, reconocimiento y codificación, pero no mucho más...

g) Implicarse en la reflexión política que implica el análisis de motivaciones que se dan según el tratamiento del lenguaje en la educación. Es decir, valorar las influencias de partir de la realidad de los individuos hacia el saber institucionalizado o el proceso inverso y analizar las dificultades que implica los posibles "usos de

lenguaje" distintos que se derivan de una u otra concepción.

BIBLIOGRAFÍA

- BOERO, P (1995) Aspetti metodologici del progetto "Bambini, maestri, realtà". Univ. di Genoa.
- BROUSSEAU, G (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état. Univ. Bordeaux.
- CHEVALLARD, Y (1991) Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique, *Seminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* 1990-91, °122, pp 103-117.
- CHEVALLARD, Y (1992) Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. vol. 12,1, 73-112.
- CIVIL, M (1994) *Using a Logo environment to create a mathematics classroom community*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa. 35
- CORTES, A (1994) *Word problems. From natural language to math. equation: the respect of homogeneity*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa. 37
- DENIS, M (1991) Imagery and thinking, in Cornoldi & McDaniel (eds) *Imagery and cognition*. Springer Verlag.
- DORFLER, W (1991) Meaning image schemata and protocols. P. Boero et al. (eds) *Proceedings PME XV Assisi* vol.1, 17-32.
- DREYFUS, T (1994) Imagery and reasoning in Mathematics Education. *Selected Lectures from the 7th Int. Congress on Mathematical Education*. Québec. 1992. Univ. Laval. Sainte Foy.
- DURKIN, J (1991) *Language in mathematics education*. Open University Milton Keynes.
- GIMENEZ, J (1994) "Lenguaje y matemáticas. Una separación sin relaciones." *SUMA* 16.
- GIMENEZ, J (1994b) *Role of intervals when functions are introduced*. Paper presented to PME XVIII. Lisboa. 40
- GIMENEZ, J (1994c) "Provocadores de descripción en el aula de Matemáticas". *SUMA* 16.
- JACOBSON, E (1975) Interactions between linguistics and mathematics education. Symposium UNESCO, CEDO & ICMI. Kenia. UNESCO Report no. ED-74/CONF. 808 Paris. Unesco.
- JANVIER, C (ed) (1987) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* Lawrence Erlbaum Ass. Hillsdale. New Jersey.
- JANVIER, C & VERGNAUD, G (1994) Bases for the PME Working Group "Representations in Math Education". *Proceedings PME 18*. Lisboa.
- KAPUT (1991) Notations and representations as mediators of constructive process. In V. Grassefield (ed) *Radical constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht. Kluwer. 53-74.
- KEITEL, C (1994) Graphic language. Conference in CIEAEM meeting. Toulouse.
- KIEREN, T (1988) Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (eds) *Number concepts and operations in the middle grades*. NCTM. Reston VA. pp. 162-181.
- KNIJNIK, G. (1993) "An ethnomathematical approach in mathematical education: a matter of political power". In *For the learning of mathematics*. Montreal.
- KULM, G (1990) *Assessing higher order thinking in Mathematics*. American Association for the advancement of science. Washington.
- LABORDE, C (1990) Language and mathematics. In Howson & Kahane (eds) *Mathematics and cognition. A Research synthesis by IGPME* pp. 53-69. Cambridge University Press. Cambridge.
- LINS, R (1992) *A framework for understanding what algebraic thinking is*. PhD Thesis. Univ of Nottingham.
- LLINARES, S. Y SANCHEZ, V. (1995) "The understanding of school mathematics topics and instructional representations. The case of fractions and rational numbers by prospective elementary teachers" In Giménez, Llinares, Sanchez (eds) *Becoming a primary teacher. Issues on Mathematics Education*. To be appear.
- LUELMO, M (1995) Monográfico. *Lenguaje gráfico en Matemáticas*. en UNO, 4.
- MASON, J (1994) Researching from the inside in Mathematics Education. Locating an I-You relationship. Ponte, J & Matos, J (eds) *Proceedings for PME XVIII*, Lisbonne 176- 194.
- MAIER, H (1993) Problemi di lingua e di comunicazioni durante le ore di matematica *La matematica ella sua didattica* 1
- OLIVERAS, M. L. (1995) *Etnomatemáticas en trabajos de artesanía andaluza. Su integración en un modelo para la formación de profesores y en la innovación del currículo matemático escolar*. Tesis no publicada. Univ. Granada.
- ORTON (1993) What is a pattern? In *Mathematics in school* 1, 8-10.
- ROJANO, T (1994) La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y

- enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 12(1) 45-46.
- SANZ,I (1994) *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos*. Tesis no publicada. Univ. del País Vasco. Donostia.
- SILVA,L.C. (1994) *Linguagem. Um obstaculo epistemológico na construção do conhecimento formal da matemática*. Tesis de maestrado no publicada. Univ. Sta Ursula. Rio do Janeiro.
- STREEFLAND ,L (1991) *Fractions in realistic mathematics education*. Kluwer. Dordrecht.
- VIGOTSKY (1962) *Thought and language*. MIT Press .
- VINNER,S (1992) *In Vivo situations* . Unpublished paper Hebrew Univ. of Jerusalem.
- YACKEL (1993) Childrens' talk in mathematics class as a function of context. In Hirabaiashi et al. (eds) *Proceedings of PME XVII*, Univ of Tsukuba, II, 199-206.