

EL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS: GENERACIÓN DE INTUICIONES EN LA MATEMÁTICA FORMAL¹

Abraham Arcavi

Weizman Institute of Science, Israel

Traducción: **Blanca Baños**

Motivación

Está ampliamente aceptado que la correcta ejecución de las operaciones no debe ser el único objetivo en el aprendizaje y enseñanza de la aritmética. El conocimiento sobre cuándo usar una operación y cuestiones como la "percepción de los números" están recibiendo más atención cada día. En términos generales, el "sentido de los números" (NCTM, 1989; Sowder and Schappelle, 1989; Sowder, 1992) puede describirse como un sentimiento "no-algorítmico": la comprensión de la naturaleza de los números y sus operaciones, la necesidad de examinar la coherencia de los resultados, la noción de orden de magnitud y la libertad para reinventar nuevas formas de operar con los números distintas de la repetición mecánica de lo que se memorizó en la escuela.

Una situación paralela es la que se da en la manipulación de los símbolos algebraicos, en parte debido a la escasa comprensión que los alumnos de secundaria poseen de los mismos a pesar de haber sido instruidos en su manejo durante años. Incluso los alumnos más aventajados en las técnicas algebraicas no perciben el álgebra como una herramienta que les permita comprender, generalizar, revelar estructuras, relaciones y hacer demostraciones. Por ello, parece apropiado definir una noción paralela a la de "sentido de los números" para dar la idea de "sentido de los símbolos".²

¿Qué es "sentido de los símbolos"?

Una primera aproximación

Comparado con la atención que recibe el término "sentido de los números", existe poca literatura referida al término "sentido de los símbolos" (una excepción es Fey (1990)). Este artículo está

¹ Esta es una versión resumida de un artículo del mismo título publicado en "For the Learning of Mathematics", 1994, 14(3), pp. 24-35.

² En este artículo, se entiende por símbolos los símbolos literales del Álgebra de la enseñanza secundaria.

enfocado a la descripción y discusión de comportamientos que ilustran con ejemplos lo que entendemos como *sentido de los símbolos*.

Haciendo amistad con los símbolos

A continuación, veamos el desarrollo de una clase típica. Empezamos por introducir los cuadrados mágicos 3x3, y planteamos el primer ejercicio:

"Complete las celdas vacías para obtener un cuadrado de suma 9"

	3	

	2	
1		5

y a continuación

en el que la suma debe ser 6. Esto nos permite introducir de forma legítima los números negativos. Después, dependiendo de la clase, propondremos uno o dos cuadrados mágicos simples más antes del siguiente, para el que solicitamos que la suma sea 8.

	4	
2		2

Dado que los ejemplos anteriores fueron fáciles éste, que no lo es, representa una sorpresa. Tras varios intentos, repasar las cuentas, comenzar por diferentes celdas, algunos alumnos plantean la posibilidad de que sea una "misión imposible"; otros continúan con la aritmética en la certeza de haber cometido algún error. Una vez que todos los alumnos están convencidos de que no hay solución, surge de forma natural la pregunta: "¿Cómo es posible que los cuadrados anteriores

tengan solución y éste no?"

Es evidente que depende de los datos y a partir de aquí los alumnos hacen sus conjeturas. Por ejemplo, el último cuadrado no se puede resolver porque la suma que nos piden es la suma de los tres números iniciales. Este tipo de discusión, con sugerencias, ejemplos y contraejemplos, mantiene a la mayoría interesados³. En general, si queremos que planteen la posibilidad de utilizar el álgebra tendremos que esperar bastante o bien marcarles la pauta con alguna pregunta dirigida: "¿Qué

podemos utilizar para verificar o rechazar una conjetura?". En cierta ocasión, al ser el álgebra mencionada como posibilidad, un escéptico cuestionó: "¿De qué van a servir las letras?".

Consideramos que los individuos que saben realizar operaciones algebraicas, pero no consideran la posible relevancia de los símbolos para manifestar la estructura de un problema que ha despertado su curiosidad, no han desarrollado su *sentido de los símbolos* por completo. El *sentido de los símbolos* incluye disponer de ellos como posibles herramientas para la comprensión.

Otra muestra de la falta de *sentido de los símbolos* se manifiesta en el hecho de que algunos alumnos son incapaces de reconocer inicialmente la solución que tienen frente a ellos en el transcurso de la resolución algebraica de un problema. Por ejemplo, en el proceso de completar el cuadrado mágico "general" llegamos al paso:

S-b-c		S-a-b
b+c-a	b	⁴
a		c

donde **a**, **b** y **c** son los números dados, y **S** la suma dada. Completar la primera celda (celda 1) exige la conciencia de que su contenido debe ser expresado en términos de **a**, **b** y **S**. Algunos alumnos poco avanzados en álgebra estarán tentados de introducir una nueva variable, ya sea por su poca experiencia en el uso de los símbolos para expresar relaciones ó porque no tengan claro que están buscando. En este caso particular las celdas 1, 2 y 3, se completaron sin mayor problema, y la celda 4 se completó por la suma de la columna resultando **a+b-c**. Llegados a este punto alguien indicó que la expresión de la suma

de la fila central era **3b** y que no contenía a **S**. El hecho de que la condición **S=3b** representara la solución buscada supuso un esfuerzo para los alumnos de aquella clase.

Es decir, creemos que el *sentido de los símbolos* debe incluir la invocación de los símbolos en los contextos apropiados y el reconocimiento de la solución simbólica. Podríamos incluso pretender un poco más. Sería deseable que cuando los símbolos se utilicen y las soluciones se reconocen, el "poder de los símbolos" sea apreciado: sólo con el uso de los símbolos una conjetura o un argumento pueden ser definitivamente aceptado o rechazado.

Si el *sentido de los símbolos* exige que reconozcamos en que situaciones son apropiados o indispensables, también requiere que sepamos cuando nos hemos ahogado en manipulaciones técnicas y debemos abandonarlas.

Por ejemplo: "¿ Para qué valores de **a** el sistema de ecuaciones $x^2 - y^2 = 0$; $(x-a)^2 + y^2 = 1$, tiene 0,1,2,3,4,5,6,7 o 8 soluciones?"⁴

Problemas como éste, que se expresan en términos algebraicos, invitan o inducen fuertemente a una solución del mismo tipo. Por tanto, no es de extrañar que muchos alumnos se lancen en picado sobre las operaciones algebraicas sin ver, o aún viéndolo, lo arduo de la labor y lo sencillo que resulta cometer errores. Evitar la tentación inicial de proceder simbólicamente e intentar otro tipo de aproximaciones requiere un saludable "control" del sentido de los símbolos. De forma resumida, este control es:

"una categoría de comportamiento referida al modo en que los individuos usan la información potencial a su disposición. Está enfocada a las decisiones principales sobre qué hacer en un problema, decisiones que en sí mismas pueden "generar o romper" los intentos de resolución. Dentro de esta categoría se consideran comportamientos de interés: hacer planes, seleccionar objetivos principales y secundarios, tutelar y comprobar las soluciones según van surgiendo, y **revisar o abandonar planes cuando los resultados indican que así deba hacerse**". (Schoenfeld, 1985, enfatizado añadido)

En nuestro ejemplo, la decisión de cambiar el

3. La dinámica de las discusiones es interesante y rica, pero no es el objeto de este artículo.

4. Este problema se ha tomado de Mathematical Problem Solving Class de Alan Schoenfel

curso de la acción significa algo más: está también motivada y arropada por un sentido de la estética, de la elegancia y de la eficacia, así como por la apreciación de que el trabajo matemático implica mucho más que el estoicismo de embarcarse en "enmarañadas" manipulaciones simbólicas. La idea es tener reacciones del tipo: "esto es muy complicado, técnico y poco creativo, **debe** haber otra forma".

La otra forma puede ser mirar el problema desde una perspectiva distinta, o cambiar la representación. En el caso anterior, las coordenadas cartesianas unidas a ciertas consideraciones geométricas nos sugieren otra forma de ver el problema; como el número de intersecciones entre las bisectrices de los ejes del plano cartesiano ($x^2 - y^2 = 0$, propiamente: $y = \pm x$) y una familia de circunferencias de radio 1 centradas en el eje x. A partir de aquí, la solución es sencilla.

Es decir, en este caso el sentido de los símbolos implicaría un sentimiento de premonición de que la persistencia en el trabajo simbólico exigirá grandes dosis de esfuerzo. Más aún, incluiría la tendencia a intentar otros modos de representar el problema, en la seguridad de que pueden existir aproximaciones más elegantes y directas y deben ser consideradas. En otras palabras, el sentido de los símbolos incluirá intuiciones sobre cuándo utilizar los símbolos y cuándo no.

Más allá de las manipulaciones: leyendo a través de los símbolos

La resolución de simples ecuaciones algebraicas no requiere más que unas habilidades standard que nos lleven al resultado, y la única lectura que requiere algo de razonamiento es dar sentido a una respuesta que está en la forma $x = \dots$.

De hecho, esta es una de las virtudes de los símbolos: nos permiten evadirnos, e incluso olvidar las referencias para conseguir resultados de forma eficaz. Alfred North Whitehead (1911) señaló la "enorme importancia de una buena notación" y la naturaleza del simbolismo en matemáticas.

"...gracias a la ayuda del simbolismo, podemos transcribir casi mecánicamente, a golpe de vista, razonamientos que de otra forma exigirían usar facultades más elevadas de nuestro cerebro.

Es un error común, repetido en miles de textos y en discursos de personas eminentes, el pretender que

debemos cultivar el hábito de pensar lo que estamos haciendo. Precisamente es lo contrario. La civilización avanza ampliando el número de operaciones importantes realizables sin necesidad de pensar en ellas. Las operaciones de pensamiento son como las cargas de caballería en una batalla -limitadas en número, requieren caballos frescos, y sólo deben hacerse en momentos decisivos". (Whitehead 1911)

Sin embargo, creemos que Whitehead habría estado también de acuerdo con Freudenthal (1983):

"He observado, no sólo en otras personas también en mí mismo, que las fuentes de la inspiración pueden entumecerse con los automatismos. Se consigue realizar una determinada actividad con tal maestría que uno ya no se cuestiona el cómo y el porqué, y deja de concebirla como algo relevante y con significado".

Interrumpir el procedimiento simbólico mecánico para inspeccionar y conectar de nuevo con el sentido que subyace bajo la expresión puede ser, en palabras de Freudenthal, un buen ejercicio mental.

Por ejemplo, una alumna en el proceso de resolver una ecuación llega a $3x+5 = 4x$. En lugar de actuar mecánicamente, es decir restar $3x$ a ambos lados, se detuvo y cambio de táctica: leyó los símbolos. Observó que si quería obtener $4x$ a la derecha a partir del $3x$ de la izquierda, tenía que añadir una x , por tanto el sumando 5 debía ser el valor de x . Aunque matemáticamente hablando ambos procesos son indistinguibles, existe una diferencia subsciente importante. Desde nuestro punto de vista interrumpir una rutina algebraica para detenerse en la lectura y darse cuenta de una relación simbólica, como en este caso, es un pequeño pero sano ejercicio de sentido de los símbolos.

Leyendo y manipulando

La solución de simples ecuaciones algebraicas, tal como se presentan en los textos y en las aulas, crea un "instinto" de manipulación operativa. Exige cierta madurez rechazar el impulso de comenzar a resolver

$$\frac{2x+3}{4x+6} = 21$$

y detenerse en la lectura de los símbolos. En este caso, se puede observar que sea x el valor que sea, como el numerador es la mitad del denominador la ecuación no puede tener solución. Esta inspección a-priori de los símbolos con la esperanza de ganar algo de comprensión sobre el problema y su significado, también forma

parte de lo que entendemos por sentido de los símbolos.

Uno de nuestros alumnos fue incluso más allá. Después de observar como hemos descrito arriba que no hay solución, se dijo: "Bueno, no tiene solución pero ¿y si "lo resuelvo" de todas formas?". Posiblemente este estudiante para el que resolver la ecuación significaba realizar las manipulaciones mecánicas habituales quería expresar la necesidad de saber de qué forma el álgebra expresa la ausencia de soluciones. Desgraciadamente, la respuesta no es muy alentadora: las operaciones habituales nos llevan sin ningún problema a $x = -3/2$. Nuestro alumno se quedó boquiabierto ante la contradicción y le costó lo suyo resolverla. Al sustituir $x = -3/2$, constató que es el único valor que no puede ser sustituido en la expresión, y ello le confirmó en sus intuiciones. No fue muy locuaz, sin embargo le sugerimos que estaba aprendiendo algo sobre el lenguaje de los símbolos y las trampas en las que podemos caer si simplemente nos dedicamos a operar con ellos de modo irreflexivo.

Expresiones equivalentes sentidos diferentes

Iniciamos esta sección con dos ejemplos. Cuando operamos con la fórmula para calcular la media aritmética de dos números, una alumna observa que una simple manipulación transforma $(a+b)/2$ en $a/2 + b/2$. Pero, no contenta con esto, llega a una nueva conceptualización de la media de dos números: "es un número hecho con la mitad de uno y la mitad del otro". Esta reconceptualización emerge de mirar expresiones simbólicas equivalentes, no como resultados formales, sino como fuentes nuevos significados.

El siguiente es otro ejemplo de comportamiento similar.

"Toma un número impar, eleválo al cuadrado y réstale 1. ¿Qué se puede afirmar del número resultante?" El problema puede ser representado por $(2n-1)^2 - 1$. De aquí pasaríamos a la forma equivalente $4n^2 - 4n$ para llegar a una conclusión general. A primera vista, la conclusión es que el número resultante es múltiplo de 4. Sacando factor común $4n^2 - 4n = 4n(n-1)$, y si ahora leemos los símbolos, tal vez nos demos cuenta que el resultado es siempre un múltiplo de 8 (dado que n y $n-1$ son enteros consecutivos y uno ha de ser par). Distintos reagrupamientos de los símbolos nos revelan algo más. Si escribimos $4n(n-1)$ como

$$8 \frac{n(n-1)}{2}$$

no es sólo evidente que el resultado es un múltiplo de 8, es un múltiplo especial de 8; el factor que multiplica al 8 es un número triangular. Estos dos ejemplos tienen una moraleja común. En ambos se incrementa el grado de comprensión al obtener expresiones equivalentes a partir de manipulaciones operativas con los símbolos. Ésta puede ser considerada otra faceta del sentido de los símbolos: la intuición y confianza los símbolos como guía en la búsqueda de peculiaridades.

La elección de los símbolos

Cuando transcribimos un problema en símbolos uno de los primeros pasos es elegir qué representar y cómo. La elección, como veremos en los ejemplos siguientes, puede tener efectos cruciales en el proceso de resolución y en los resultados.

Primero consideremos de nuevo el ejemplo del apartado anterior. Si el número impar se representa por n en lugar de por $2n-1$, la expresión obtenida es n^2-1 . A pesar de la legitimidad de la elección de la notación, los resultados obtenidos posiblemente nos den menos información. Si factorizamos $n^2-1=(n-1)(n+1)$, sabremos que el número es el resultado del producto de dos números pares consecutivos. Uno de los números debe ser múltiplo de 4, por tanto el resultado será múltiplo de 8. Sin embargo, no queda claro qué tipo de múltiplo de 8 es. La elección de $2n-1$, en lugar de n , introduce en el propio símbolo la información inicial, y por ello el resultado también ofrece más información sobre la estructura del número obtenido.

La elección de los símbolos no sólo puede mantener oculta parte de la información, a veces impide la resolución. Consideremos el siguiente problema, tomado de SNARK, 1977.

John fue a cobrar un cheque por una suma inferior a 100 \$. El cajero confundió los dólares con los centavos (es decir, si el cheque era de 19.45 \$, pagó a John 45.19 \$). John tomó el dinero y después de gastar 3.50 \$, se percató de que tenía el doble del valor del cheque. ¿A cuánto ascendía el valor del cheque?

Si nos decantamos por representar el valor del cheque por x , es bastante improbable que progrese en la resolución. Por otro lado, expresar cada uno de los cuatro dígitos por una

variable distinta nos conduciría a una situación enrevesada. La elección óptima sería representar con una variable los dos dígitos de los dólares y con otra los dos dígitos de los centavos.

No queremos decir con esto que una elección inicial inadecuada de las variables indique necesariamente una falta de sentido de los símbolos, pero sí que deseáramos resaltar la importancia de considerar al menos tres aspectos. Primero, la libertad de la elección de notación. Los mismos "tipos" de números pueden ser representados de distintas formas. Tres números enteros consecutivos pueden representarse por $n, n+1, n+2$ o por $n-1, n, n+1$ o bien $n-2, n-1, n$. La elección puede simplificar los cálculos, incluso el resultado final. Segundo, la concienciación de que la elección inicial no es un camino sin retorno. Podemos reiniciar la representación de otra manera si lo creemos más conveniente ó bien si la elección anterior ha resultado improductiva. Tercero, queremos incluir dentro de lo que consideramos sentido de los símbolos la intuición de cuál es la elección óptima en determinados casos.

Habilidades operatorias flexibles

Incluso en los contextos en que creemos, coincidiendo con Whitehead, que es necesario operar mecánicamente sin reparar en el significado deberíamos tener una guía "formal" o "técnica" del sentido de los símbolos que mantenga el control de lo que hacemos. La correcta manipulación simbólica es algo más que la obediencia ciega de las reglas; hay aspectos del sentido de los símbolos que se pueden considerar incluso cuándo obviamos los referentes. Por ejemplo, percibir la posible circularidad de una manipulación, la visión "panorámica"⁵ de algunas expresiones simbólicas y las manipulaciones orientadas por objetivos formales.

Círculos y panorámicas

Tener una visión panorámica es sentir los símbolos no sólo como una concatenación de letras, sino poder distinguir relaciones como, por ejemplo, en Wenger(1987):

5. N. del T. : Se traduce "gestalt" por panorámica.

"Si uno puede ver a través de la maraña de símbolos que la ecuación,

$$V\sqrt{U} = 1 + 2V\sqrt{1+U}$$

en la que se trata de hallar $v]$ es lineal en v , el problema está prácticamente resuelto; las ecuaciones de la forma $av=b+cv$, tiene solución de la forma $v=b/(a-c)$, si $a \neq c$, independientemente de lo complicada que sea la expresión de a, b y c . Los alumnos siempre tienen dificultades con este tipo de problemas. Realizarán manipulaciones correctas de las ecuaciones, llegarán a ecuaciones más complicadas ó volverán, tras varias ecuaciones intermedias, a la ecuación de la que partieron "yendo en círculos". Nótese que los alumnos suelen realizar las operaciones correctamente en estas situaciones.

La primera observación es lo que consideramos una visión panorámica, mientras que la última se refiere a la manipulación circular.

En el mismo parrafo Wenger señala que los alumnos "a menudo parecen realizar los pasos al azar, sin ninguna estrategia en mente". Esta observación nos lleva al próximo punto a considerar:

Objetivos formales

" Un rectángulo (puede ser un cuadrado) se dibuja en un papel cuadriculado con las celdas de los bordes marcadas

En este caso, el número de celdas marcadas alrededor del borde no es el mismo que el número de celdas interiores sin marcar.

¿Es posible dibujar un rectángulo de este tipo en el que el número de celdas marcadas coincida con el número de celdas sin marcar? (Problema 87 en Longley-Cook, 1965, de la forma que aparece en Gardner 1983)"

A continuación incluimos una solución propuesta por un matemático. Comienza por suponer que $2a+2(b-2)$, es el número de celdas marcadas, por tanto $ab-[2a+2(b-2)]$, es el número de celdas interiores. Igualando, tenemos la ecuación $ab-4a-$

$4b-8=0$ (1). La expresión sugiere la búsqueda de una factorización, de la que se puedan deducir todos los posibles valores para **a** y **b**. Un primer intento le lleva a **$a(b-4)-4(b-2)=0$** , pero es imposible factorizarla. Sin embargo, se percató de que transformando **(b-2)** en **(b-4)** se podría factorizar. Para conseguirlo añadió 16 a ambos lados de la ecuación (1), lo que le condujo a la ecuación **$(b-4)(a-4)=8$** , de la que se obtienen las dos únicas rectángulos posibles **6×8** ó **5×12** .

Esta solución muestra dos estadios del sentido de los símbolos: la representación de los datos de forma útil y manejable y después las operaciones formales dirigidas a un determinado propósito.

Símbolos en retrospectiva

En un aula (de primero de facultad) obtuvimos una solución distinta al problema del rectángulo. Pasado un intervalo de tiempo en el que los alumnos operaban con los símbolos sin obtener resultados alentadores, uno llegó a la solución que describimos anteriormente. En este punto, una matemática que se hallaba de forma casual en la clase, presentó una solución que ella había encontrado y que no se apoyaba en el uso de símbolos. Según su propio testimonio, su experiencia del Origami, arte japonés de doblar papel, había sido la fuente de su inspiración. Mentalmente ella doblaba una de las filas del borde sobre la fila interior adyacente. De esta forma ambos números el de las celdas del borde y el de las interiores coincidían excepto por dos de más en el borde. Repitiendo el proceso con la otra fila del borde, se añadía dos celdas extras que no coincidían. Después doblaba las columnas de los bordes (sin las celdas de los bordes que ya habían sido eliminadas) quedando pues 8 celdas extras sin pareja (dos celdas extras por cada esquina). Si quería que el número de celdas interiores y de los bordes coincidiese, necesitaba emparejar las 8 celdas. Para tal propósito necesitaba 8 celdas interiores formando un rectángulo. Sólo hay dos posibilidades: **1×8** o **2×4** . Desdoblando el origami en los dos casos, obtenía los rectángulos originales solución del problema. Una solución ingeniosa y bella en sí misma: general, sin símbolos, y claramente visual. Uno de los alumnos expresó lo que para él tenía de sorprendente: esta solución alternativa, sin símbolos, estaba claramente relacionada con la solución algebraica explicada en clase (y señalada en el parrafo anterior). Este estudiante remarcó que al resolver una ecuación algebraica que representa un determinado problema, nos desprendemos del significado de los símbolos y

sus referentes. Los pasos intermedios no se observan en correspondencia con la situación real, son realizados de una forma mecánica y (por tanto eficiente) hacía la solución. De todas formas, en este caso, la solución simbólica y la del origami guardan estrecha relación.

En la ecuación simbólica el 8 aparece como mero artificio de la manipulación en el proceso de factorizar la ecuación. Posteriormente, gracias a la solución del origami, vemos el sentido del 8 y de la ecuación.

Cuando se resuelve un problema mediante una modelización matemática, se suele establecer la equivalencia entre los símbolos y su significado al comenzar (al crear el modelo) y se retoma al final (para interpretar el resultado en los términos del problema original). Durante los cálculos es normal operar de forma mecánica sin tener en mente la equivalencia de significado. A este estudiante de nuestro ejemplo los símbolos le "hablaban claramente", porque era capaz de reconocer el significado real que había en ellos y en los pasos intermedios, algo que es bastante infrecuente. Esto es algo a considerar como un claro ejemplo de sentido de los símbolos.

símbolos en su contexto

En el caso de una relación lineal **$y=mx+b$** , a pesar de que **x,y** ("variables") y **m,b** ("parámetros") representan números, el tipo de objetos matemáticos que se obtienen al darles valores pueden ser completamente distintos. En el plano cartesiano, dando valores numéricos a **x** e **y**, se fija un punto determinado en el plano, y dando valores a **m** y **b** se determina una recta. Es decir **$y=b$** puede interpretarse de dos formas dependiendo del contexto. Si se obtiene como resultado de sustituir **$x=0$** en **$y=mx+b$** , entonces hemos encontrado la ordenada (o familia de ordenadas) en que la recta corta al eje y. Pero, por otro lado, si **$y=b$** se obtiene como resultado de sustituir **$m=0$** en **$y=mx+b$** , habremos encontrado la familia de rectas de pendiente 0⁶.

En esta sección sugerimos que un componente deseable en el sentido de los símbolos consiste en el reconocimiento "in situ" de los diferentes papeles (a la

6. Un uso cuidadoso de la notación de conjuntos requeriría escribir en el primer caso $\{(x,y)/x=0, y=b\}$, mientras que en el segundo caso sería $\{(x,y)/y=b\}$.

vez que similares) que juegan los símbolos en el álgebra de la secundaria. Ese reconocimiento conlleva saber analizar la multiplicidad de significados dependiendo del contexto, y la habilidad para manejar diferentes objetos y procesos (Sfard, 1992; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi 1993).

El siguiente es un ejemplo de un caso en que un alumno no fue capaz de comprender los diferentes papeles que pueden jugar los símbolos. El problema, de su libro de texto (Resnick, 1991) era: "Hallar, si es posible, un número que al ser sustituido en d , dé lugar a una función lineal". Doce expresiones venían a continuación, la última de las cuales era $y=(x^2-4)/(d-2)$. Suponiendo que se tenga una idea clara de los diferentes papeles que juegan los símbolos, la solución es sencilla. Sea cual sea el número sustituido en d (claramente no el 2), la función no puede ser lineal. Nos quedamos perplejos con el razonamiento del alumno. Tras una visión panorámica descompuso x^2-4 en $(x-2)(x+2)$, y como para él $x-2$ podía simplificarse con $d-2$ si $d=x$ ($d \neq 2$) se obtenía una ecuación lineal, $x+2$. En este caso, su operatividad simbólica, útil en otras ocasiones para simplificar, interfería claramente su visión sobre el papel que representaban los símbolos. Su razonamiento no fue en ningún momento dubitativo, ni trató de verificar su solución, por el contrario se sentía exultante por haber realizado la tarea encomendada. No cuestionó la legitimidad de su razonamiento en absoluto. Por nuestra parte la reacción no fue muy afortunada ya que no conseguimos hacerle comprender dónde estaba el error. Tal vez estaba más allá de su capacidad el comprender la "ilegalidad" del paso $d=x$, al menos en ese momento.

¿Qué es sentido de los símbolos?

Si inspeccionamos las características comunes de los comportamientos anteriores, nos encontraremos en una mejor situación para caracterizar el sentido de los símbolos. En términos generales podemos decir que el sentido de los símbolos es una compleja y multifacética forma de "sentir" los símbolos. Parafraseando la definición que para "sentir" da el Diccionario Enciclopédico de Oxford, sentir los símbolos es una rápida y acertada apreciación, comprensión e intuición de los símbolos.

De acuerdo con lo anterior, el sentido de los símbolos incluiría:

- Sentido estético y comprensión por el poder de los símbolos: cómo y cuándo deben ser utilizados para representar relaciones, generalizaciones y demostraciones que de otra forma serían invisibles o estarían escondidas.
- Sentir cuándo se deben abandonar los símbolos para intentar otras formas de aproximación, para poder obtener soluciones más claras, elegantes y sencillas.
- Habilidad para manipular y leer expresiones simbólicas como aspectos complementarios en la solución de un problema. Por un lado, el alejamiento del significado necesario para las manipulaciones unido a una visión panorámica de la expresión simbólica genera una rápida y eficiente manipulación de los símbolos. Por otro lado, la lectura reflexiva de las expresiones simbólicas añade relaciones y da sentido a los resultados.
- Conciencia de que se pueden construir las expresiones simbólicas que expresen una información verbal ó gráfica dada, lo que puede ser útil para avanzar en la resolución

References

- Borges, J.L., 1989. "Funes el Memorioso". In Borges, J.L., *Ficciones*. Decimosexta reimpresión, Alianza Editorial, Madrid, pp. 121-132.
- Clement, J., 1982. "Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception". *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13(1), pp. 16-30.
- Davis, P.J. and R. Hersh, 1986. *Descartes' Dream - The World According to Mathematics*. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, San Diego, Boston, New York, pp. 283-4, 287, 289.
- Dugdale, S. and D. Kibbey, 1986, *Green Globes and Graphing Equations* [A computer based instructional package]. Sunburst Communications, Pleasantville, NY.
- Dugdale, S., 1993. "Functions and Graphs - Perspectives on Student Thinking". In Romberg, T.A., E. Fennema and T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. L. Erlbaum Associates, Inc. Hillsdale, NJ. pp. 101-130.
- Fey, J., 1990. "Quantity". In Steen, L.A. (Ed.), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy*. National Academy Press, Washington, D.C., pp. 61-94
- Fischbein, E. and I. K.

de un problema.

- La posibilidad de seleccionar una posible representación simbólica y si no resulta satisfactoria tener el coraje de abandonarla y tener recursos para encontrar otra mejor.
- La necesidad de verificación continua del significado de las expresiones simbólicas mientras se resuelve el problema, comparando y contrastando esos significados con la propia intuición o con los resultados que se esperan obtener.
- Percibir los distintos papeles que juegan los símbolos en los diferentes contextos. ■