

6. Las Matemáticas en los nuevos bachilleratos

LA CIRCUNFERENCIA Y OTRAS CURVAS ESPECIALES

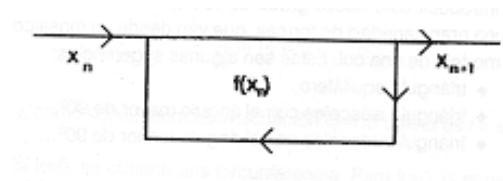
Magdalena Morata.
Juan Carlos Orero.
Grupo Cero de Valencia

LA CIRCUNFERENCIA Y OTRAS CURVAS ESPECIALES

La geometría es el conocimiento de las imágenes. Pero este conocimiento surge a partir de unos procesos dinámicos mentales, que se formalizan por medio de una actividad algebraica. Por otra parte, las ideas algebraicas están, generalmente, sustentadas en modelos geométricos. **Geometría y álgebra** aparecen, en este nivel (y en este trabajo), estrechamente relacionadas.

Si el papel de la geometría en la vida cotidiana, en la naturaleza, en las ciencias y en el arte está fuera de toda duda, el estudio de las curvas, a nuestro juicio, debe ocupar un lugar fundamental en la educación matemática. En este taller se ha intentado mostrar un posible tratamiento de algunas curvas: **circunferencias, espirales, cicloldes**. El uso del ordenador permite hacer un estudio dinámico, empírico y constructivo de las mismas y facilita la verificación de conjeturas y la realización de investigaciones.

Los procesos que generan las curvas estudiadas son iterativos, de **retroalimentación**: la misma operación se realiza repetidamente, de forma que la salida de una iteración es la entrada de la siguiente. Este tipo de procesos puede representarse por medio del siguiente esquema:



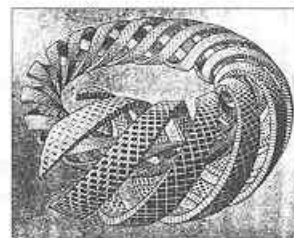
La retroalimentación permite explicar situaciones complejas por medio de algoritmos sencillos. Además, un mismo algoritmo, al cambiar ligeramente las condiciones iniciales, puede ser modelo de procesos aparentemente muy diversos. Este carácter nos abre un camino para introducirnos en el mundo de los **fractales**.

Este enfoque, además de favorecer el desarrollo de la imaginación y la intuición y la interacción de diversas habilidades y procedimientos, permite poner en contacto diversos campos de las matemáticas como números, geometría, geometría fractal, álgebra y sucesiones.

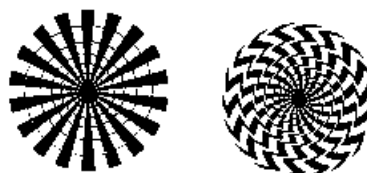
1. ESPIRALES

1.1. ¿Espirales?

Las espirales han fascinado a los matemáticos, pero también a los artistas, desde hace tiempo.

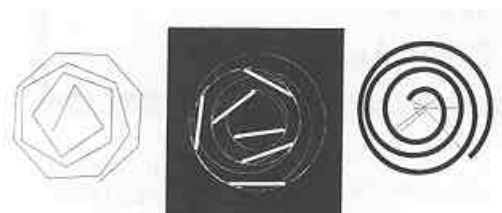


- Las siguientes **¿espirales?** Han sido creadas por Nicholas Wade [5]. Obsérvalas atentamente.



- Quince variaciones sobre un mismo tema

Las siguientes figuras forman parte de la obra "Quince variaciones sobre un mismo tema" del artista Max Bill, miembro de la Bauhaus. Todas han sido desarrolladas a partir de la espiral poligonal de la izquierda.

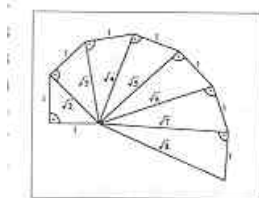


- ¿Cuál es el algoritmo que permite construir el tema inicial?

- ¿Cómo se han construido los restantes, a partir de éste?

1.2. La espiral pitagórica

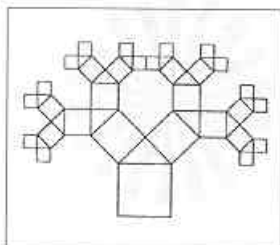
El cálculo de raíces cuadradas ha inspirado a algunos matemáticos interesantes creaciones geométricas. Una de ellas, que permite construir $\sqrt{n}$ para cualquier número n entero, es la llamada **espiral pitagórica**:



- *Escribe el algoritmo que permite generar la espiral anterior ¿Cómo varían los ángulos que forman dos radios consecutivos?*
- *Construye la figura correspondiente al algoritmo que sigue:*
 1. Dibuja un cuadrado.
 2. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles, de modo que su hipotenusa coincida con un lado del cuadrado.
 3. Dibuja un cuadrado sobre cada uno de los catetos del triángulo anterior
 4. Repite los pasos 2 y 3 sobre cada uno de los cuadrados.

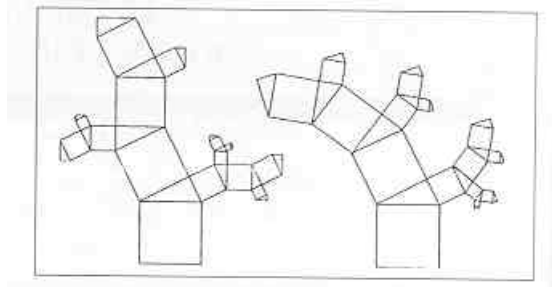
¿Qué relación tiene con la espiral anterior?

Esta es la figura resultante de iterar el algoritmo cuatro veces. Se trata de un **árbol pitagórico**.



¿Qué tipo de árbol se obtendrá si el triángulo rectángulo no es isósceles?

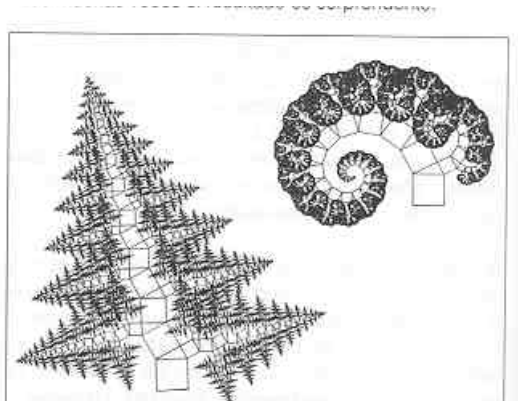
Hay dos posibilidades, según que los triángulos se sitúen siempre con la misma o diferente orientación. Las figuras que se obtienen con pocas repeticiones:



no se diferencian demasiado entre sí, pero si se repite el proceso muchas veces el resultado es sorprendente.

Mientras que la primera tiene una estructura en

espiral, la segunda recuerda claramente a un árbol. Sin embargo, ambas se construyen por medio de un mismo proceso de retroalimentación y son autosemejantes.



- ¿Y si el triángulo no es rectángulo?

Al introducir este nuevo grado de libertad se abre camino a una gran variedad de formas, que van desde un mosaico al modelo de una col. Estas son algunas sugerencias:

- ♦ triángulo equilátero,
- ♦ triángulo isósceles con el ángulo mayor de 90° ,
- ♦ triángulo isósceles con el ángulo menor de 90° ...

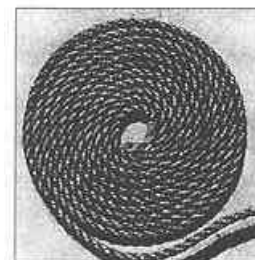
La comparación de las diferentes estructuras obtenidas plantea nuevas e interesantes cuestiones:

- ♦ ¿En qué casos se reduce un solapamiento?
- ♦ ¿Cuál es la pauta que regula el decrecimiento de los lados de los triángulos o de los cuadrados?
- ♦ ¿Qué figuras son autosemejantes?

1.3. Espirales arquimedianas y logarítmica

Estas son dos de las espirales más conocidas. Su estudio es muy sencillo si se utilizan coordenadas polares.

La espiral **arquimediana** es un buen modelo para el arrollamiento de una soga o una alfombra o las pistas de un disco. La distancia entre sus espiras se mantiene siempre constante. Se podría definir, por lo tanto, a partir de la siguiente relación: *cuando el ángulo aumenta en progresión aritmética, el radio también crece en progresión aritmética.*



Así, si $r_1, r_2, r_3, \dots$ son los radios correspondientes a puntos de la espiral separados entre sí por un ángulo

α , se verifica que:

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \dots$$

Por lo tanto, esta curva puede modelizarse por la ecuación $r = k\alpha$.

La espiral **logarítmica**, cuyo ejemplo más conocido es la concha del "nautilus", obedece a la siguiente regla: cuando el ángulo se incrementa en progresión aritmética, el radio aumenta en progresión geométrica.

La relación entre radios consecutivos $r_1, r_2, r_3, \dots$ correspondientes a puntos de la espiral separados entre sí por el mismo ángulo α es:

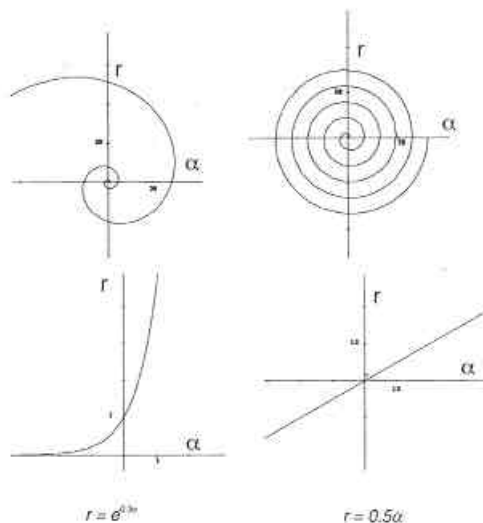
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \dots$$

y, como consecuencia, la ecuación que la define es $r = e^{k\alpha}$

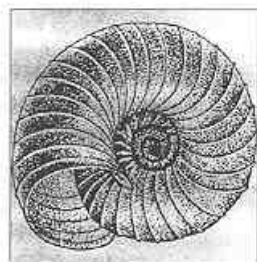
Si $k=0$, se obtiene una circunferencia. Para $k>0$, la espiral se construye de dentro a fuera, creciendo indefinidamente. Si $k<0$, la espiral se enrolla hacia el origen del sistema de referencia, a medida que el ángulo aumenta.

- Dibuja las gráficas en coordenadas polares y cartesianas de una espiral arquimediana y otra logarítmica. Compáralas.

Es interesante visualizar simultáneamente la **gráfica en polares**, que muestra el desarrollo de cada espiral, y la **gráfica cartesiana** correspondiente, que resalta claramente el diferente crecimiento o decrecimiento de los radios en cada caso: **lineal** para la arquimediana y **exponencial** para la logarítmica.

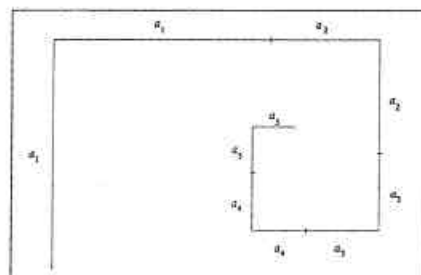


1.3. Longitud



- Un grupo de objetos que parecen desafiar las medidas de longitud son las espirales. Pero ¿es esto realmente cierto? ¿Tienen las espirales longitud finita o infinita?

Vamos a considerar una familia particular de espirales poligonales. El proceso iterativo de construcción, que se puede apreciar en la figura adjunta, facilita el estudio de su longitud. Para ello partimos de una sucesión decreciente de números positivos: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

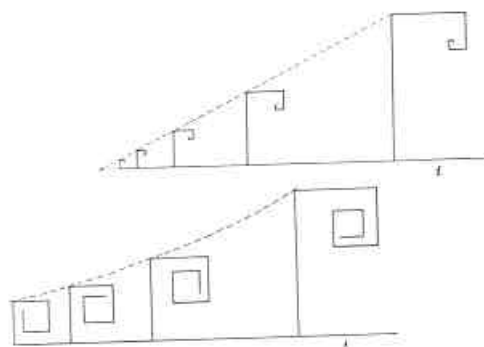


-¿Cuál es la longitud de la poligonal anterior?

El cálculo de la expresión $2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nos permite obtenerla. Pero ¿es siempre posible?

- ♦ ¿Cuál es la longitud de las espirales generadas a partir de las sucesiones de término general $a_n = (1/2)^n$ y $a_n = 1/n$?

Las siguientes figuras, en las que las espirales se van desdoblando a lo largo de una recta muestra que, mientras la longitud de la primera es finita e igual a 4, la segunda tiene una longitud infinita.



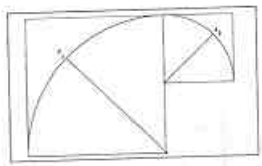
En efecto, la suma de una **serie geométrica**, de término general $a_n = a_1 r^n$, cuando la razón $r < 1$, viene dada por $\frac{a_1}{1-r}$, y por lo tanto la longitud de la primera espiral es igual a

$$2 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

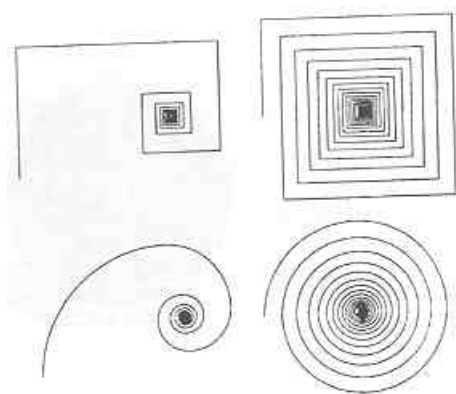
En cambio, la segunda ha sido generada a partir de la serie **armónica**, cuya suma es infinita. Paradójica-

mente tenemos una longitud infinita en un área finita.

- ♦ A partir de las anteriores es posible obtener espirales curvas, por medio del algoritmo mostrado en la figura adjunta: Construye las curvas correspondientes a las dos espirales poligonales anteriores y calcula sus longitudes.



- ♦ Dos de las siguientes espirales tienen longitud finita, mientras que la de las otras dos es infinita. ¿Podrías distinguirlas a simple vista?



Dibuja la espiral poligonal y curva correspondiente a la sucesión de término general $a_n = (1/f)^n$ donde f es el número de oro. ¿De qué espiral se trata? ¿Qué longitud tiene?

Autosemejanza

El matemático Jacobo Bernoulli dedicó un tratado, titulado **Spira Mirabilis**, a la espiral logarítmica. Con la expresión **Eadem Mutata Resurgo**, resumió una de sus propiedades más interesantes: la **autosemejanza**, que la relaciona con los fractales.

Dibuja la espiral $r = e^{-0.35a}$ y amplíala con un factor 3. ¿qué relación hay entre ambas curvas?

Se obtiene la misma espiral, pero ¿qué transformación geométrica hay que aplicar a la segunda gráfica para que coincida exactamente con la primera?

Aplicar a la espiral geométrica de ecuación $r = e^{-ka}$ un cambio de escala r es equivalente a girarla un ángulo b que verifica la condición $r = e^{kb}$

¿Qué cambio de escala y qué rotación dejan invariante la espiral $r = e^{-0.061a}$?

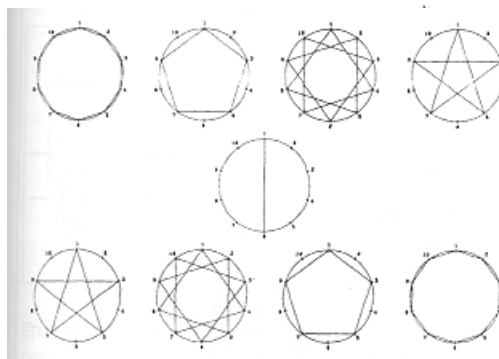
¿Cuáles de las figuras tratadas anteriormente son autosemejantes?

2. CURVAS CICLOIDES

Las siguientes propuestas enfocan un estudio dinámico de la circunferencia como fuente de formas sugerentes en un doble sentido artístico y matemático.

La analogía, que permite conectar cosas aprendidas en diferentes contextos, será el hilo conductor que haga surgir estas formas.

2.1. Polígonos en la circunferencia



Consideremos una circunferencia sobre la que hemos distribuido regularmente diez puntos numerados 1, 2, 3, ..., 10, dividiéndola en diez arcos iguales. Si unimos con un segmento de recta, empezando por 1, cada punto i con el punto siguiente $i+1$, obtendremos un decágono regular.

Pero, ¿qué ocurre cuando ensayamos otras formas regulares de unir los puntos; cada punto i con $i+k$ mediante un segmento que subtienda k arcos consecutivos?

Obtenemos la siguiente secuencia de polígonos:

Usamos para nombrar cada polígono el símbolo **P{10,k}** en el que lo es el número de arcos en que está dividida la circunferencia, y k el número de arcos que subtiende cada nuevo segmento trazado.

Un vistazo a esta secuencia hace que nos planteemos inmediatamente algunas preguntas:

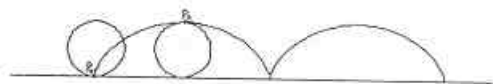
-¿Qué tipo de polígonos hemos obtenido? ¿Para que valores de k obtenemos polígonos regulares estrellados? ¿A qué se debe la notable simetría interna que muestra la propia secuencia? ¿Podríamos haber anticipado el número de lados de cada nuevo polígono antes de empezar a unir los puntos sobre la circunferencia? ¿qué secuencias obtendremos para cualquier división de la circunferencia en un número n arbitrario de arcos? ¿Podemos siempre anticipar la forma de cualquier polígono **P{n,k}**? ¿Qué es, por ejemplo, un **P{27,15}**.

2.2. Las cicloides

Una de las propiedades fundamentales de la circunferencia es, precisamente, que puede rodar.

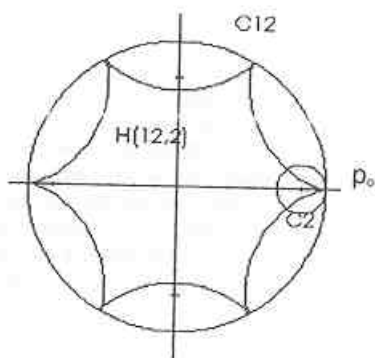
Hagamos rodar sin deslizamiento una circunferencia apoyada sobre una recta. Fijemos nuestra atención en el punto de contacto de ambas figuras y sigamos la trayectoria que describe este punto cuando la circunferencia se desplaza girando.

La curva así obtenida es la cicloide (Galileo 1515-99).



Consideremos ahora dos circunferencias. Una circunferencia de radio 2 (C_2) se apoya internamente en otra de radio 12 (C_{12}). Llamemos P_0 al punto de contacto entre ambas circunferencias. Hagamos rodar sin deslizamiento a C_2 , sobre C_{12} y sigamosle la pista a P_0 .

¿Qué curva describirá ese punto?



En efecto la curva está formada por seis pequeños arcos que constituyen una especie de hexágono regular de lados curvos. Designaremos esta curva con la notación $H(12,2)$ y la llamaremos Hipocicloide de parámetros 12 y 2, donde 12 y 2 representan, respectivamente, los radios de la circunferencia exterior e interior.

De la visión de esta curva surge irremediablemente la imagen mental de los polígonos regulares que hemos construido sobre la circunferencia. Parece innegable que hay similitudes entre ambas situaciones, pero ¿en qué sentido?

Nos hacemos nuevas preguntas.

¿Qué ocurrirá si variamos el radio de la circunferencia interior?, ¿podemos anticipar la apariencia de una $H(12,5)$?, ¿podemos usar de alguna forma lo que conocemos acerca de la construcción de polígonos en la circunferencia? ¿qué similitudes y qué diferencias hay entre ambas situaciones? ¿qué relación hay entre una $H(12,2)$ y una $H(6,1)$? ¿y entre $H(12,5)$ y $H(12,7)$? ¿podemos anticipar la apariencia de cualquier $H(a,b)$? ¿obtendremos siempre una curva cerrada? y, si es así, ¿cuántas vueltas completas tendrá que dar la circunferencia que rueda hasta cerrar la curva?

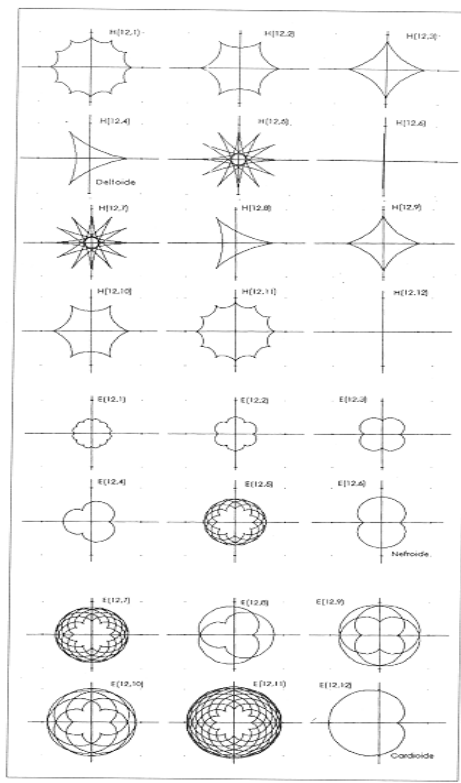
¿Qué ocurrirá si consideramos una nueva familia de curvas haciendo rodar sin deslizamiento una circunferencia C_a que se apoya externamente sobre otra C_b ?

Obtendremos las Epicicloides de parámetros a y b : $E(a,b)$. ¿Cuál es su aspecto? ¿valdrá para ellas lo estudiado en las hipocicloides?

Llegados a este punto nos gustaría disponer de un procedimiento mecánico para el trazado de estas curvas. Claro, que hacer girar una circunferencia sobre otra sin deslizamiento es una tarea bien difícil, ya que la circunferencia, en esencia, es una curva resbaladiza. Podemos construir dos círculos de cartulina gruesa para obtener las curvas punto a punto o trabajar con ruedas dentadas; proveernos de un espirógrafo.

Una forma de sustituir el trazado mecánico de epicicloides e hipocicloides consiste en obtener una simulación de este trazado mecánico en el ordenador. Los lenguajes de programación y el software que conocemos no nos permiten por el momento hacer esta simulación de forma cómoda. Esto supone un contratiempo muy importante a la hora de tratar el tema en clase, pero veremos que es posible obtener una imagen de cada una de estas curvas -con ayuda del ordenador- usando otros procedimientos.

El primero de estos procedimientos, muy fecundo porque permite poner en contacto la geometría con el álgebra, consiste en hallar las ecuaciones de las curvas y obtener sus representaciones gráficas usando un programa como DERIVE u otro similar. De este modo se han obtenido las siguientes imágenes que pueden ayudar a obtener respuestas para algunas de las preguntas planteadas anteriormente.



El cálculo de las ecuaciones es complejo, pero esta complejidad resulta ciertamente enriquecedora en el aula porque permite poner de manifiesto el enorme valor de algunos procedimientos algebraicos simples pero poderosos como la suma de vectores, el uso de las expresiones polares de los mismos o las ecuaciones paramétricas de las curvas y algunas propiedades geométricas de ángulos y circunferencias de especial interés.

En clase, además de calcularlas, podemos preparar un archivo con la ecuaciones de las epicicloides y de las hipocicloides de parámetros a y b , de modo que los alumnos puedan investigar el efecto que produce la variación de estos parámetros sobre el aspecto de las figuras.

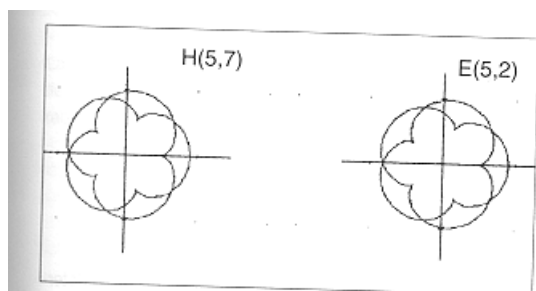
Las expresiones paramétricas de estas curvas son:

HIPOCICLOIDES	EPICICLOIDES
$x(t)=(a+b)\cos t - b\cos((a+b)t/b)$	$x(t)=(a-b)\cos t + b\cos((a-b)t/b)$
$y(t)=(a+b)\sin t - b\sin((a+b)t/b)$	$y(t)=(a-b)\sin t + b\sin((a-b)t/b)$

Estas ecuaciones son triplemente paramétricas. Conviene observar que a y b (los radios de las circunferencias) son fijos para cada curva particular y t variable. Variando los parámetros a y b obtenemos toda la familia de epicicloides.

Las ecuaciones de las curvas nos permitirán hacer algunas cosas que no nos permitiría el trazado mecánico de las mismas con un soporte físico. Por ejemplo nos permitirá rodar una circunferencia C_b , interiormente sobre otra fija C_a , aún cuando su radio b sea mayor que a .

Veamos ahora dos nuevas imágenes obtenidas a



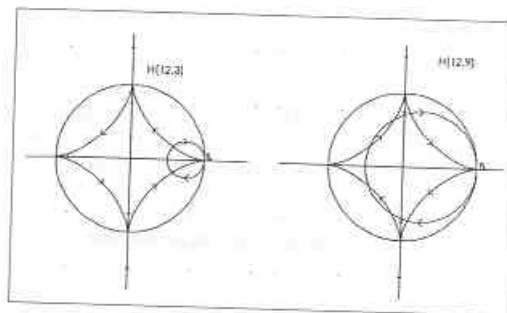
partir de las ecuaciones:

En estas imágenes y en las de la secuencia precedente podemos observar un par de propiedades interesantes:

$H(12,3)=H(12,9)$ y en general
 $H(a,b)=H(a,c)$ cuando $c=a-b$

$H(5,7)=E(5,2)$ y en general
 $H(a,c)=E(a,b)$ cuando $c=a+b$.

Intentaremos una aproximación geométrica y otra algebraica para dar una explicación de la primera de las propiedades.



Si miramos la pantalla del ordenador durante los trazados de $H(12,3)$ y de $H(12,9)$ observaremos que, en cada caso, el punto que traza ambas curvas - idénticas- las recorre en sentidos inversos.

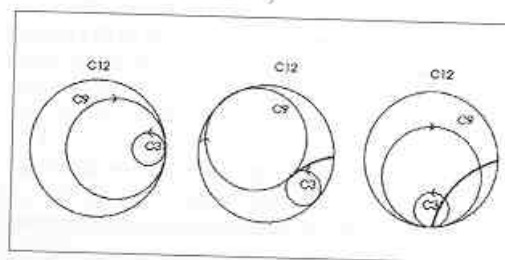
En el trazado de los Polígonos sobre la circunferencia $P\{12,3\}$ y $P\{12,9\}$ se da una situación equivalente, ya que unir dos puntos con un segmento recorriendo 9 arcos en un sentido es lo mismo que unir los mismos puntos recorriendo 3 arcos en el sentido opuesto.

Podemos conjeturar que con las epicicloides ocurre algo parecido.

Para explicar la igualdad $H(12,3) = H(12,9)$ $12=3+9$, vamos a reforzar el punto de vista dinámico. En primer lugar vamos a suponer que C_3 y C_9 recorren la circunferencia C_{12} en sentidos opuestos pero con la misma velocidad angular. Esto permitirá que cuando la circunferencia C_3 haya recorrido su longitud, la circunferencia C_9 , haya hecho lo mismo en el sentido opuesto y las tres circunferencias serán de nuevo mutuamente tangentes como en la posición de partida.

Veamos la secuencia correspondiente a tres etapas de este trayecto: la posición inicial, el momento en que las circunferencias interiores han recorrido la mitad de su longitud sobre la circunferencia de apoyo y finalmente cuando ambas han recorrido toda su longitud.

Para demostrar el caso general, $H(a,b)=H(a,c)$ cuando $a=b+c$, basta hacer la sustitución $t=bt'$ en la ecuación de $H(a,b)$ y la sustitución $t=-ct'$ en la ecuación de $H(a,c)$, para asegurarnos una velocidad angular igual y constante y sentidos de giro opuestos para cada circunferencia rodante. De este modo se obtiene:



Para demostrar el caso general, $H(a,b)=H(a,c)$ cuando $a=b+c$, basta hacer la sustitución $t=bt'$ en la ecuación de $H(a,b)$ y la sustitución $t=-ct'$ en la ecuación de $H(a,c)$, para asegurarnos una velocidad angular igual y constante y sentido de gir opuestos para cada

circunferencia rodante. De este modo se obtiene:

$$H(a,b)=H(a,c)= \\ [c \cos(bt') + b \cos(ct'), c \sin(bt')(-b \sin(ct'))]$$

Un argumento dinámico similar –dos circunferencias- C_c y C_b que ruedan respectivamente por el interior y por el exterior de C_a girando en el mismo sentido con velocidad angular idéntica, permite reducir ambas familias de curvas a una sola: la de las epicloides o la de las Hipocicloides.

2.3. La circunferencia no deja de dar sorpresas

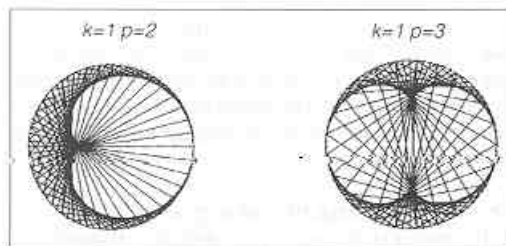
En el inicio de esta sección vimos una construcción estática de los polígonos $P\{n,k\}$ sobre la circunferencia, y ahora vamos a ver una construcción dinámica. Imaginemos un punto de la circunferencia P_0 que está situado inicialmente en 0 y que recorre la circunferencia, dividida en n arcos iguales, en el sentido de las agujas del reloj con una velocidad lineal constante que le permite recorrer k arcos en un segundo. Si marcamos las posiciones sucesivas del punto P_0 a intervalos regulares de un segundo de un segundo obtenemos una sucesión de puntos $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$ que serán los vértices sucesivos de un polígono $P\{n,k\}$ que será:

- Regular convexo si n/k es entero.
- Regular estrellado si n/k es racional.
- Otra cosa si n/k es irracional.

Vamos a explotar esta idea para obtener nuevas figuras.

Consideremos, no uno, sino: P_0 y Q_0 que coinciden inicialmente y movámoslos sobre la circunferencia con velocidades lineales constantes pero diferentes en el sentido de las agujas del reloj hasta que vuelvan a coincidir en la misma posición inicial.

Supongamos que P_0 recorre k arcos en un segundo y que Q_0 recorre p en un segundo. Para que ambos puntos vuelvan a coincidir en la posición inicial, es conveniente dividir la circunferencia en un número de arcos que sea múltiplo de k y de p .



Unamos ahora, cada segundo, las posiciones sucesivas $P_0, P_1, P_2, \dots, P_m$ con las correspondientes $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ y veamos las figuras que obtenemos para

diferentes valores de k y de p .
¡Obtenemos de nuevo las epicloides!

¿Qué ocurrirá si hacemos girar cada uno de los puntos en sentidos opuestos?

La elaboración de un programa recursivo que simule esta situación en un lenguaje similar a WINLOGO está al alcance de los alumnos y provee una forma diferente de construir estas curvas. En la elaboración de un programa de estas características intervienen muchos conceptos matemáticos de tipo numérico, geométrico, y algebraico amén de procedimientos algorítmicos recursivos o iterativos de gran interés. La explicación de porqué se obtienen las cicloides y las epicloides de este modo queda fuera de los objetivos del bachillerato.

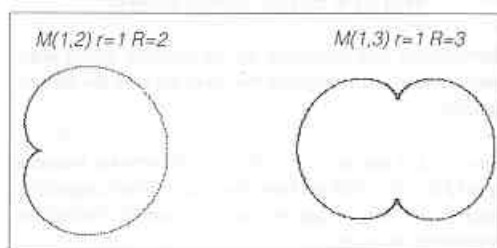
Para finalizar consideremos otro procedimiento que consiste en hacer girar los extremos de dos radios R y r , inicialmente coincidentes alrededor del otro extremo fijo, común a ambos radios.

Cada radio va a girar con una velocidad angular proporcional a la longitud del otro radio: el radio R girará con velocidad angular rt , y el radio r girará con velocidad angular Rt .



Las posiciones de los extremos P y Q de cada radio determinan en todo momento un segmento. Observaremos el lugar geométrico que describe el punto medio M de este segmento; un lugar geométrico que designaremos $M(r,R)$. Para visualizarlo, podemos elaborar un programa que permita dibujar ese lugar geométrico para diferentes valores de R y r .

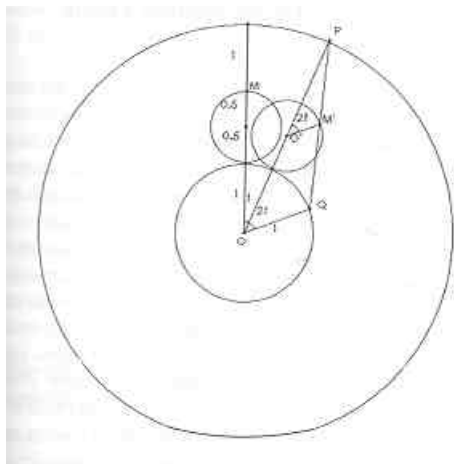
De ese modo se han obtenido las siguientes curvas:



No es difícil comprobar que cada $M(r,R)$ es una epicloide $E(a,b)$ de parámetros $b=R/2$ y $a=(R-r)/2$.

Así la curva $M(1,3)$ es idéntica a la $E(1,0.5)$ que salvo

la escala, es idéntica a una **E(2,1)** como se puede observar en la figura anterior. Una explicación geométrica de este hecho se obtiene estudiando la siguiente figura:



La circunferencia **C_{0.5}** se apoya sobre la circunferencia **C₁** y tiene su centro en el punto medio del radio **R=3**. Cuando el radio **R=3** gira un ángulo **t**, el radio **r=1** gira un ángulo **3t** y el punto **M** gira alrededor de **O'** sobre **C_{0.5}** un ángulo **2t** transformándose en **M'**. El ángulo **POQ = 3t - t = 2t**.

Los triángulos **POQ** y **PO'N'**, entonces son semejantes y por lo tanto **PM'/PQ = OM'/OQ = 1/2** y el punto **M'** de la epicycloide **E(1,0.5)** coincide con el punto medio del segmento **PQ**.

El mismo argumento geométrico se puede generalizar para valores cualesquiera de los radios **R** y **r**.

Si en lugar de hacerlo girar en el mismo sentido, hacemos que los radios **R** y **r**, giren en sentidos opuestos obtendremos las hipocicloides.

Esta nueva definición de la epicycloides y las hipocicloides nos permitirá finalmente obtener sus ecuaciones de una forma sencilla:

$$\frac{1}{2}[R \cos(rt) + r \cos(Rt), R \sin(rt) + r \sin(Rt)]$$

Para las epicycloides

$$\frac{1}{2}[R \cos(rt) + r \cos(Rt), R \sin(rt) - r \sin(Rt)]$$

Para las hipocicloides

Es interesante observar la simetría que presentan ambas ecuaciones y la similitud con las obtenidas al final del apartado 2.2

La circunferencia puede continuar dándonos sorpresas pero eso será tema de otros trabajos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. **Matemática nella realtà**, Castelnuovo E., Boringhieri, Torino. 1977.
- [2]. **The Art and Science of Visual Illusions**, Routledge and Kegan Paul, London. 1982, citado en [7]
- [3]. **Geometric Images**, ATM, Devon, 1982.
- [4]. **Curves**, Allen & alter, Leapfrogs, Norfolk 1982.
- [5]. **Images of Infinity**, Hemming-Tahta, Leapfrogs, Norfolk. 1984
- [6]. **París: Arte abstracto, arte concreto. Cercle et carré. 1930**, IVAM Centro Julio González, Generalitat Valenciana, Valencia 1990.
- [7]. **Fractals for the classroom, vol 1 y 2**, Peitgen-Jürgens Saupe, Springer-Verlag. New York. 1992.