

EL IMPACTO DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EN LA ENSEÑANZA DE APLICACIONES MATRICIALES A NIVEL PREUNIVERSITARIO

Antonio Quesada

Universidad Akron. Estados Unidos.

En los últimos ocho años, las promesas de la década de los setenta sobre el posible impacto en la enseñanza de la tecnología en general y de los ordenadores personales en particular, han empezado a materializarse. En matemáticas, encontramos la segunda generación de las calculadoras gráficas y los sistemas algebraicos para ordenadores con capacidades para hacer gráficas de funciones y llevar a cabo complicados cálculos numéricos o simbólicos en un tiempo despreciable. Al mismo tiempo, el costo de estos equipos se ha ido abaratando y se prevee que los incrementos en ventas, que empiezan a ser masivos, producirán una reducción mucho mayor del precio actual. Las repercusiones del uso de estas tecnologías en el salón de clase tienen el potencial de afectar substancialmente no sólo el currículo, sino que también la metodología tradicionalmente usada en la enseñanza de matemáticas.

En lo que sigue, a menos que se especifique lo contrario, cuando usamos la expresión calculadora gráfica o simplemente calculadora, nos referiremos exclusivamente a las calculadoras que están actualmente en el mercado, tales como los modelos TI-81 y TI-82 de Texas Instruments, o cualquier otra marca como Casio, Sharp. etc., con capacidades comparables.

Sin tratar de ser exhaustivos, mencionaremos algunos de los factores que pueden contribuir a los cambios a que aludimos. En primer lugar, las nuevas tecnologías nos permiten usar distintos enfoques a la hora de presentar un concepto o de resolver un problema. Así por ejemplo, en adición al enfoque algebraico tradicional de cómo resolver una ecuación, con la calculadora también podemos presentar métodos numéricos y gráficos. Esto no sólo permite un tratamiento unificado del tema, sino que también amplía la visión del estudiante tanto al construir un concepto como al aplicarlo. En segundo lugar, el poder llevar a cabo verdaderas proezas numéricas y gráficas sin mayor esfuerzo, promueve el que problemas tradicionalmente reservados para universidad se hagan accesibles a nivel de bachillerato. Al mismo tiempo, estos nuevos enfoques o incluso las operaciones programadas que las calculadoras proveen, nos ofrece la alternativa de facultar a personas que nunca han estudiado, digamos cálculo, para usar modelos matemáticos tradicionalmente reservados para los que estudian

esta disciplina.

Consideremos como un primer ejemplo los problemas de optimización. Tradicionalmente, no era sino hasta que un estudiante aprendía a encontrar los extremos de una función usando cálculo diferencial, que se empezaba con estos problemas. Sin embargo, el uso de la calculadora gráfica permite obtener directamente los extremos de una función continua sin necesidad del cálculo diferencial. ¿Es razonable seguir presentando estos problemas como una aplicación del cálculo, o dada su relevancia deberíamos presentarlos en una etapa más temprana y permitir que el cálculo de extremos se haga con una calculadora? El argumento a favor de la necesidad de usar cálculo por ser el proceso que produce "soluciones exactas", ignora por completo que la industria usa resultados decimales con una precisión mucho menor que la que obtenemos con una calculadora.

En forma análoga, el análisis de la gráfica de una función y la solución de ecuaciones que envuelven funciones algebraicas y trascendentes, o incluso ecuaciones algebraicas con soluciones irracionales no podían ser presentadas antes de estudiar cálculo. Aún entre aquellos que estudiaban cálculo, el número de estos ejemplos que resolvían y el grado de dificultad de los mismos, estaban limitados por la considerable inversión de tiempo que conlleva resolverlos con papel y lápiz, aún cuando se use una calculadora científica. La necesidad de alcanzar un nivel aceptable de eficiencia en el uso de algoritmos, sin los que no era posible resolver la mayor parte de los problemas, trajo como consecuencia un gran énfasis en el aprendizaje de los procesos algorítmicos. A menudo, este enfoque permitía dedicar muy poco tiempo a los conceptos matemáticos subyacentes y a su aplicación a la resolución de problemas del mundo que nos rodea. No es de extrañar que se haya encontrado [2] que un porcentaje alto de estudiantes que han estado estudiando cálculo diferencial e integral, no pueda contestar correctamente preguntas elementales sobre conceptos básicos de funciones de variable real. Es decir, la habilidad de poder llevar a cabo procesos algorítmicos no garantiza la comprensión de los conceptos matemáticos envueltos. Por otro lado varios estudios han encontrado que, aún manteniendo el contenido tradicional, el uso de la calculadora gráfica puede ayudar a mejorar la ejecución y el nivel de comprensión de estudiantes de precálculo y cálculo

[7], [8] sin detrimento aparente de sus habilidades algorítmicas.

Es evidente que en el futuro muchos de los algoritmos tradicionales sufrirán la suerte de la raíz cuadrada. Por otro lado no podemos deshacernos de un proceso matemático, por el hecho de que una máquina pueda llevarlo a cabo con mayor rapidez y precisión, sin considerar cuidadosamente los beneficios pedagógicos que la práctica de ese proceso pueda generar. Pasará algún tiempo antes de que, en las distintas áreas, se encuentre un balance entre lo que debemos mantener y lo que podemos eliminar. Pero cada vez parece mas claro que, en la mayor parte de los casos, la meta será el entender la esencia de los algoritmos, en el contexto de la teoría a la que pertenecen, y el poder aplicarlos valiendose de una máquina.

La cantidad de tiempo necesario para llevar a cabo operaciones con matrices, así como para evaluar determinantes con papel y lápiz, constituye la razón primordial por la que los modelos de variable discreta que envuelven el uso de matrices no figuran en el currículo de bachillerato. Sin embargo, si los criterios que usamos para seleccionar los modelos matemáticos que se enseñan a este nivel incluyen: a) la variedad e importancia de las aplicaciones que el modelo provee al mundo que nos rodea, y b) la accesibilidad del estudiante al nivel de sofisticación de los conceptos y operaciones que el modelo envuelve, se hace difícil justificar cómo, con las facilidades matriciales de las modernas calculadoras, algunos de estos modelos de uso frecuente en la industria pueden ser excluidos del currículo de bachillerato.

A continuación presentamos lo que podría ser a) el mínimo a cubrirse con relación a sistemas de ecuaciones lineales, y b) algunos ejemplos de modelos matemáticos de variable discreta tradicionalmente reservados para cursos universitarios, no tanto por su complejidad sino por la dificultad de los cálculos matriciales que requieren. Estos y otros modelos han empezado a aparecer en libros de texto de matemáticas para estudiantes de bachillerato [1], [3], [4], [5], [6]. Consideramos que al remover la dificultad de las operaciones con matrices vía el uso de calculadoras gráficas, los modelos pueden ser presentados a nivel preuniversitario.

I. Sistemas de Ecuaciones Lineales

El uso de las calculadoras gráficas facilita el complementar desde un principio la presentación tradicional de los métodos algebraicos para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con la interpretación geométrica de los resultados. El método de reducción puede extenderse a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, a fin de introducir la idea de equivalencia de sistemas. Las tres operaciones básicas que producen sistemas equivalentes, es decir a) el cambiar de orden dos ecuaciones, b) el substituir una ecuación con un múltiplo escalar de la misma, o c) el substituir una ecuación con una combinación lineal de ella misma con otra ecuación, permiten presentar organizada-mente el método de reducción de Gauss. Después de

9. Influencia de las Nuevas Tecnologías

esto es fácil abstraer la matriz aumentada de los coeficientes del sistema y usar las operaciones de filas que la calculadora gráfica provee para llevar a cabo el método de reducción. El método de reducción de Gauss usando matrices y el método más rápido de ecuaciones matriciales es todo lo que un estudiante necesita para resolver rápida y eficientemente un sistema de ecuaciones lineales.

La mayor virtud del método de reducción de Gauss reside en que siempre nos da el conjunto solución, independientemente de que este sea vacío, unitario o de cardinalidad infinita. En principio, parece haber un poco de resistencia a usar las operaciones de filas que la calculadora provee entre los estudiantes que han aprendido a hacer el método de reducción a mano. Sin embargo, esta resistencia disminuye a medida que el tamaño de los sistemas o de los coeficientes en los mismos aumentan.

Si denotamos un sistema lineal con su ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, entonces cuando $\mathbf{A}^{-1}$ existe, la solución puede obtenerse fácilmente con la calculadora como $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. El problema con este método reside en el hecho de que sólo puede usarse cuando es regular, pero ése es el caso también con el método Cramer. Por tanto el método no aplica a los sistemas lineales con un número distinto de ecuaciones e incógnitas, o a los sistemas cuadrados donde una ecuación es dependiente de las otras, en cuyo caso debemos usar el método de reducción. Aún cuando los estudiantes no hayan estudiado determinantes formalmente, es fácil establecer que una matriz $\mathbf{A}$ es inversible si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, donde $\det$ es una función que asigna un valor numérico a una matriz cuadrada. Así pues el uso de la calculadora nos permite remover el método de Cramer del currículo, e incluso el estudio de la teoría de determinantes puede diferirse hasta que haya aplicaciones que lo justifiquen.

El procedimiento general que recomendamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{X}_{n \times 1} = \mathbf{B}_{m \times 1}$ puede resumirse así:

Si $m=n$ y si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$; en cualquier otro caso se usa el método de reducción de Gauss

Ya que antes o después los estudiantes que usan calculadoras van a enfrentarse con errores de redondeo o resultados racionales en forma decimal, las siguientes sugerencias pueden ser de interés. Si como resultado de una operación algunos de los elementos de una matriz son de la forma 2.15E-12, podemos usar $\text{Round}(\mathbf{A}, 0)$ para reducirlos a cero. Si se desea obtener $\mathbf{A}^{-1}$ con elementos enteros, podemos

usar $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (\det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1})$ en la TI-81. En la

TI-82, basta con usar $\boxed{\triangleright \text{Frac}}$ para cambiar los elementos a fracciones.

Por último, debe señalarse que si $\mathbf{A}$ es inversible pero sus elementos son casi iguales a los de una matriz singular $\mathbf{B}$, el error de redondeo puede hacer difícil el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$. De hecho, si $\mathbf{A}$ es la matriz de los coeficientes de un sistema lineal cuadrado, el

sistema será muy sensible a pequeños cambios en los valores de los coeficientes. Consideremos por ejemplo, los siguientes dos sistemas:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4.9975x + 6y = 33 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4.99 + 6y = 33 \end{cases}$$

cuyas soluciones son, respectivamente, $(-8800, 7335.16)$ y $(-2200, 1835.16)$. Es sorprendente la diferencia entre las soluciones que un cambio tan pequeño como 0.0075 en el valor de un coeficiente, ha producido. Los estudiantes captan fácilmente la razón que justifica el comportamiento de estos sistemas con sólo pedirles que los comparen con el sistema incompatible:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ 4x + 6y = 33 \end{cases}$$

Problemas como el anterior que estaban reservados tradicionalmente para los estudiantes universitarios de Análisis Numérico, pueden, con un esfuerzo mínimo, y en nuestra opinión deben, ser presentados a nivel preuniversitario.

Del mismo modo pueden incorporarse al estudio del álgebra de matrices contraejemplos a las propiedades clásicas de los números reales, los cuales constituyen la base primordial para la intuición numérica de los estudiantes de bachillerato. Así por ejemplo, una vez que las matrices

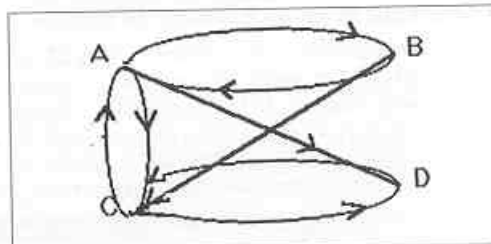
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se han entrado en la calculadora, toma tan solo unos segundos calcular DE , ED y D^3 . Así, sin pérdida de tiempo, los estudiantes observan no sólo la falta de conmutatividad en el producto sino también la existencia de divisores de cero y de elementos nilpotentes, ausentes naturalmente del cuerpo de los números reales.

Está claro que el usar calculadoras para resolver sistemas de ecuaciones, o para llevar a cabo cálculos con matrices o determinantes, reduce el tiempo que tradicionalmente necesitamos para cubrir estos temas. Además, algunos temas como la regla de Cramer o el cálculo de determinantes pueden omitirse por completo. Por último, las destrezas algebraicas que los estudiantes deben adquirir al estudiar algunos de los algoritmos tradicionales del álgebra de matrices, no deben ser tan sofisticadas como lo han sido hasta ahora. El objetivo de mantener algunos de estos algoritmos será el de facilitar la comprensión de los conceptos envueltos, no el de depender manualmente de los mismos para obtener resultados confiables. El ahorro de tiempo que estos cambios reportan puede usarse para estudiar algunas de las aplicaciones matriciales que permiten resolver modelos matemáticos de variable discreta. Estos modelos, que se han hecho más relevantes al aumentar el uso que la industria hace de los mismos, envuelven laboriosas operaciones con matrices que la calculadora gráfica simplifica. Veamos alguno ejemplos.

II. Una Aplicación de Redes

Los puntos A, B, C y D en el diagrama dado representan cuatro equipos de rescate en una región montañosa. Las flechas indican las posibles transmisiones de radio. Así por ejemplo, el equipo de rescate D puede comunicarse directamente con C pero no con A. D sólo puede comunicarse con A de forma indirecta usando C como relevo. ¿Cuál es el mínimo número de relevos que garantiza que todos los equipos puedan comunicarse entre sí? ¿Qué equipos necesitan al menos dos relevos? ¿Más de dos relevos?



Enumeremos los equipos **A, B, C y D** con **1, 2, 3 y 4**

4. Sea **M** la matriz de incidencia del grafo donde

$$(M_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si el equipo } i \text{ puede comunicarse directamente con el } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

esto es $M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$

Consideremos $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ya que $(M^2)_{1,1}=2=(0,1,1,0)(0,1,1,0)^t$, vemos que hay dos caminos distintos de un relevo, o dos tramos, que comunican **A** con **A**: $A \rightarrow B \rightarrow A$ y $A \rightarrow C \rightarrow A$. Análogamente $(M^2)_{4,2}=1=(0,0,1,0)(1,1,1,1)^t$ nos indica que hay un solo camino de dos tramos desde **D** hasta **B**: $D \rightarrow C \rightarrow B$. Así pues M^2 nos da el número de caminos de dos tramos entre dos equipos cualesquiera, y ya que **M** nos da el número de caminos de un tramo, entonces $M+M^2$ nos da el número de caminos de uno o dos tramos.

$$M + M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El cero en la posición (2,4) de $M+M^2$ nos dice que no existe un camino de uno o dos tramos que comunique **B** con **D**. Procediendo como antes

obtenemos los caminos de tres tramos y de a lo sumo tres tramos

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} M + M^2 + M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos finalmente que dos equipos de rescate cualesquiera pueden comunicarse con, a lo sumo, dos relevos.

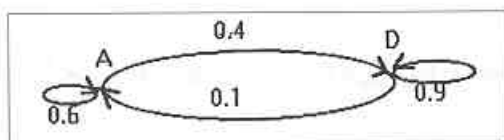
El problema que acabamos de resolver, aunque pequeño, puede extrapolarse fácilmente a redes mucho mayores de, por ejemplo, vuelos entre ciudades, o de comunicaciones telefónicas, cuya importancia en el mundo actual es clara.

III. Una aplicación de cadenas de Markov

En un estudio reciente se ha encontrado que cada año en la ciudad de Metrópolis el 40% de las familias que alquilan la vivienda en que residen compran una vivienda, mientras que el 10% de los dueños de vivienda pasan a alquilar su alojamiento. Si en la actualidad un 45% de los habitantes de Metrópolis son propietarios, ¿cómo cambiará este porcentaje en el futuro?

Un grafo, una matriz, y un diagrama de árbol son excelentes representaciones para esta información. Usaremos las dos primeras.

El grafo que sigue representa la información dada. Así por ejemplo la flecha de D a A denota el 10% de los dueños que pasan a alquilar.



La información puede también fácilmente expresarse con una matriz cuyas filas y columnas representan los vértices (estados) del diagrama.

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} D & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ A \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El porcentaje de propietarios después de un año es

$$P(D,D)+P(A,P)=(0.45)(0.9)+(0.55)(0.4)= [0.45 \ 0.55][0.9 \ 0.4]^T=0.625$$

mientras que el porcentaje de los habitantes que alquilan viene dado por

$$P(D,A)+P(A,A)=(0.45)(0.1)+(0.55)(0.6)= [0.45 \ 0.55][0.1 \ 0.6]^T=0.375$$

Observamos que denotando la distribución inicial por $\mathbf{d}_0=[0.45 \ 0.55]$ y la matriz del grafo, llamada matriz de transición, por $\mathbf{T}$, podemos calcular la distribución después de un año usando

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0 \mathbf{T} = [0.45 \ 0.55] \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = [0.625 \ 0.375]$$

Claramente la distribución después de dos años esta dada por $\mathbf{d}_2=\mathbf{d}_1\mathbf{T}=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^2$, y la distribución después de n años será $\mathbf{d}_n=\mathbf{d}_{n-1}\mathbf{T}=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^n$.

Podemos animar al estudiante a explorar el comportamiento a largo plazo de estas distribuciones preguntando: ¿obtendremos una distribución distinta cada año que pase?

Toma tan solo unos segundos el producir la siguiente sucesión con una calculadora gráfica.

$$\mathbf{d}_4=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^4=[0.778125 \ 0.221875]$$

$$\mathbf{d}_8=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^8=[0.798633 \ 0.201367]$$

$$\mathbf{d}_{16}=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^{16}=[0.799995 \ 0.200005]$$

$$\mathbf{d}_{32}=\mathbf{d}_0\mathbf{T}^{32}=[0.799999 \ 0.200000]$$

Vemos que para valores de n suficientemente grandes $\mathbf{d}_n$ converge a una distribución estable **[0.8 0.2]**. Es decir, en aproximadamente ocho años el 80% de la población de Metrópolis serán dueños de la vivienda en que residan, mientras que el 20% restante vivirá en una vivienda de alquiler. Además, si las condiciones iniciales no cambian, estos porcentajes se mantendrán estables.

Las siguiente preguntas pueden ayudar al estudiante a descubrir el comportamiento general de estos modelos.

1. ¿Cuál será la distribución final si inicialmente hubiera solo un 30% de propietarios? ¿Y si el porcentaje inicial de propietarios fuera de un 60%?
2. ¿Depende la distribución final $\mathbf{d}_n$ de la inicial $\mathbf{d}_0$? ¿Qué ocurre con $\mathbf{T}^n$ a medida que n crece? ¿Pasará lo mismo con cualquier matriz de transición?

Si los estudiantes estuvieran familiarizados con sucesos independientes en probabilidad, convendría subrayar el hecho de que los sucesos en estos modelos dependen sólo del estado previo.

Hay otros ejemplos importantes de aplicaciones matriciales que podríamos haber mencionado tales como el modelo económico de Leontiev, las aplicaciones a la criptografía, etc. Si bien favorecemos los ejemplos que hemos presentado, cualquiera de ellos ayudaría a los estudiantes a reconocer la importancia de las matrices a la hora de modelar matemáticamente problemas relevantes de la vida real.

BIBLIOGRAFÍA

1. Advanced Mathematics: Precalculus with Discrete Mathematics and Data Analysis, Richard G. Brown, Houghton Mifflin, Boston, MA, 1992.
2. Steven F. Bauman & William O. Martin, Assessing the Quantitative Skills of College Juniors, The College Mathematics Journal, May 1995
3. Contemporary Precalculus Through Applications, The North Carolina School of Science and Mathematics, Janson Publications, Inc., Dedham, MA, 1992.
4. Matrices, Jean de Lange Jzn., Wings For Learning, Inc., Scotts Valley, CA, 1992.
5. Matrix Models (Course 2, Unit 1), Core-Plus Mathematics Project, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, Unpublished.
6. Precalculus and Discrete Mathematics, The University of Chicago School Mathematics Project, Scott, Foresman, Glenview, IL, 1992.
7. A. Quesada, "On the effects of Using Graphing Calculators in Calculus", Proc. of the Sixth Ann. Int. Conf. on Techn. in Colleg. Math. pp 296-300, Parsippany, New Jersey, Nov 4-7, 1993.
8. A. Quesada & M. Maxwell, "The Effects of Using Graphing Calculators to Enhance College Students' Performance in Precalculus", Educ. Studies in Math, Vol 27, pp 205-215, 1994.