

DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A APRENDER ...

Juan Antonio García Cruz

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

1975 fue, para muchos, un año importante política y educativamente hablando. El 1 de Octubre, además de ser el último aniversario que Franco pasaría vivo, fue el comienzo del Bachillerato Unificado y Polivalente. Personalmente yo me estrené como profesor aquel curso. De ahí que para mí tenga una importancia especial. Con la llegada del BUP, las matemáticas modernas alcanzan por el fin el nivel más alto de la enseñanza secundaria en este país. Curiosamente cuando después de década y media de ensayo en USA, Francia, Bélgica y otros países accidentales está comenzando su declive a nivel internacional. Cuestionada casi desde el comienzo entre otros por H.Freudenthal y R.Thom, su principal caracterización podría ser el gran énfasis puesto en los contenidos a enseñar.

El programa de primero de BUP constituía todo un paradigma, veamos algunos ejemplos:

La combinatoria. Variaciones, ¿métodos intuitivos?, ¿esquemas para poder contar? No. Contar sí, pero hay que contar de forma moderna: contaremos aplicaciones inyectivas entre dos conjuntos. A continuación, detrás de la combinatoria y como si de una continuidad natural se tratara va la Probabilidad. Eso sí, con toda la parafernalia de la teoría de conjuntos como apoyo para los razonamientos lógicos y su fundamentación formal. Las técnicas de combinatoria son para resolver los problemas.

Números reales y complejos. Las estructuras algebraicas contextualizadas. El aprendizaje en espiral, una de las ideas metodológicas de la década anterior se pone en marcha con el tema de los polinomios: el anillo $\mathbb{Z}[x]$ como otra materialización de la estructura algebraica de anillo, o quizás generalización del anillo $\mathbb{Z}$.

¿La estadística y la matemática financiera? ... Pues la pondremos al final. Antes hay que explicar matemáticas a nuestros alumnos y alumnas. ¡Verdaderas matemáticas! Muchas veces me he preguntado si esos temas no serían una concesión al adjetivo de Polivalente que acompañaba al sustantivo Bachillerato.

Lo de unificado en lo que respecta a la matemática estaba bastante claro: ¡Hay que unificar la matemática bajo el paradigma Bourbakista!

¿Cómo se enseñaban esas matemáticas?
¿Teníamos un estilo propio de enseñar matemáticas?
¿Lo tuvimos alguna vez? ¿Lo tenemos ahora?

Yo era muy pequeño cuando murió Puig Adam. Cuando empecé como profesor, no me queda más remedio que confesarlo, nunca había odio hablar de los trabajos de didáctica de Puig Adam. También he de confesar que no he hecho mucho por enterarme de su trabajo en este campo, amen de las dificultades que he encontrado cuando los he buscado. Al igual que yo no me había enterado o no quise enterarme, en este país, a nivel oficial, nadie parecía darse por enterado de a dónde nos podía llevar el experimento renovador de la Nueva Matemática. Así, nos encontramos con la paradoja, de que cuando en casi todo el mundo se cuestiona la matemática moderna, en este país tomó carácter oficial en el tramo superior de la enseñanza no universitaria.

¿Qué nos pasó a los profesores?

Al final nos empezamos a dar cuenta de que enseñábamos lo que podíamos y cada vez nos fuimos acercando más y más a las recetas, los trucos para salir del paso y así, la matemática que aprendieron nuestros alumnos fue una matemática ramplona llena de algoritmos y carente en la mayoría de los casos de significado, incluso de significado matemático al haber abandonado el estructuralismo, y caer en brazos de su hermano bastardo: el mecanicismo.

En 1976, el III ICME, celebrado en Karlsruhe (RFA) surge la polémica sobre el abandono de la geometría y de su papel en la enseñanza (M. Atiyah). También se levanta acta y se confirma la defunción del Estructuralismo y se certifica el nacimiento del Mecanicismo cuando P.Hilton en su conferencia plenaria dirigida a los asistentes afirma: *"El análisis se construye de forma que parezca un conjunto de trucos, los cuales aprende el estudiante y una vez que esta entrenado en ellos se considera que ha alcanzado el nivel de madurez requerido. Para que el análisis parezca relevante al alumno, se le ofrecen ejemplos acabados, es decir, ejemplos diseñados simplemente para ilustrar las habilidades particulares que el alumno se esfuerza en adquirir"*

Se está a la búsqueda de una alternativa y poco a poco se empieza a oír un slogan, "Volver a lo básico" (Back to Basic).

Aquí, en nuestro país, han surgido los grupos Cero en Valencia y Zero en Barcelona. En Canarias, noviembre de 1977, se funda la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas (SCPM). Uno de los objetivos y el principal motivo que hizo que surgiera la S.C.P.M. fue el mejorar la enseñanza de las matemáticas. Lo cual es bastante obvio. Sin embargo nos motivó una idea que empezaba ya a ser moneda corriente entre los círculos de profesores de matemáticas, y que era la creencia firme de que nosotros, los profesores de a pie deberíamos realizar el cambio. La confianza en las instancias oficiales era poco menos que nula. Todavía no nos habíamos instalado en esas instancias. Pero no pasaría mucho tiempo antes de conseguir ese objetivo.

Creo que los grupos, en particular el Cero de Valencia, había empezado su andadura en 1974, el grupo Zero de Barcelona comenzaría la suya al siguiente año. Un estilo inglés, D. Fielker y la ATM, es el que impregna al grupo Cero de Valencia. Los Zero de Barcelona se mueven más hacia una matemática utilitaria, sus primeros libros me recuerdan el SMP de esa época.

En Canarias nos proponemos reformar el BUP desde la base. ¿Cómo? De la única forma que nos pareció podríamos hacerlo, escribiendo unas lecciones de matemáticas más acordes con lo que entendíamos que debería ser básico, sin concretarlo y asumiendo que estaba muy claro para todos, y con el objetivo de que las leyera nuestros alumnos y al mismo tiempo sirvieran para modificar la metodología del profesor. Hicimos algunos cambios en los programas oficiales, por ejemplo, pasamos las progresiones a 2º de BUP y las colocamos dentro del tema general de sucesiones. Suprimimos la Probabilidad en tercero, pues no entendíamos que se debiera enseñar variables aleatorias y distribuciones de probabilidad antes que la probabilidad condicionada y el teorema de Bayes, que estaba y sigue estando en COU, entre otras cosas. Y entendíamos que un libro, sea de texto o unas simples lecciones, es la forma más rápida de llegar a un gran número de alumnos y de profesores. Pronto fueron adoptadas como libro de texto en muchos institutos de toda la región. Incluso llegamos a realizar una reedición de las lecciones de primero. Sin índice, sin numeración en las páginas correlativas entre lección y lección. Con el paso del tiempo, me parece mentira que pudiésemos haber tenido tanto éxito. A mí, personalmente nunca me llegaron a satisfacer del todo. La ilusión con la que confeccionamos las lecciones de primero, decayó bastante al empezar las de segundo y desapareció casi por completo con las de tercero.

Desde entonces hemos abandonado la edición de documentos curriculares o lecciones de matemáticas y hemos dedicado los esfuerzos de la S.C.P.M. a servir de convocante de Jornadas, encuentros y cursos, además de publicar y mantener a duras penas la revista *Números*. Esta función como transmisora de la cultura didáctica internacional y nacional que la SCPM ha desarrollado casi desde su fundación en 1977, creo

que ha sido una de las más valiosas contribuciones realizadas en el campo educativo. Durante casi dos décadas por nuestras islas han pasado Claude Gaulin, Emma Castelnuovo, Alan Bell, David Tall, Alan Schoenfeld, David Fielker, Martin Kindt, Malcolm Swan, Leone Burton y representantes de casi todos los grupos del estado español, Cero de Valencia, Zero de Barcelona, Azarquiel, etc... espero no haberme olvidado de alguien o de algún grupo.

La función de divulgar el conocimiento didáctico sea a través de cursos, jornadas o mediante la publicación de documentos como es el caso de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) es una de las mejores contribuciones que el conjunto de las sociedades y la federación pueden realizar; es además, un espacio que no estaba ocupado por ninguna otra institución oficial. En este sentido la traducción y publicación por la SAEM de las *Estándares Curriculares*¹ y los documentos que los desarrollan, conocidos como "*agenda series*", es de un valor todavía no medible, pero sin lugar a dudas muy valioso.

A finales de los setenta empezó a cuestionarse el slogan "Vuelta a lo básico". ¿Qué es lo básico? Ya que no parecía posible enseñar matemáticas modernas, ¿habría que enseñar matemáticas básicas? Esta última pregunta nos lleva a otra de forma natural, ¿qué son matemáticas básicas? ¿la geometría?, ¿la aritmética?

Había demasiadas opiniones sobre qué es "lo básico". Esta pregunta impregnó el III ICME de Berkeley celebrado en el verano de 1980. ¿Podría ser la resolución de problemas el foco de atención y respuesta a esa pregunta? Casi como una bienvenida a todos los profesores que asisten al ICME el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) edita su famosa *Agenda in Action* para toda la década de los ochenta. Así la resolución de problemas, *the problem solving approach*, se pretende que sea algo más que otro slogan y se convierta en toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo.

George Polya estaba invitado como conferenciante de una de las plenarias, no pudo asistir por motivos de salud, pero envió una nota de agradecimiento que fue recogida en las actas y cuyo título era "*Mathematics promotes (improves) the mind*", pero con una condición enigmática, "*la matemáticas ayudan a desarrollar la mente, siempre y cuando se enseñen y se aprendan de forma apropiada*", para seguir con una pregunta: *¿Qué puede hacer el maestro de matemáticas para que su enseñanza mejore la mente de sus alumnos?* y terminar con una lamentación, "*... éste debería ser un tema que merece la pena discutir en este congreso. Pero ya es demasiado tarde, debería haberse propuesto meses antes. Por lo tanto lo propongo para el próximo. Espero que entre la audiencia haya alguien que piense sobre ello, la recuerde y la proponga para el próximo congreso. Tengo algunas ideas y, si alguien está interesado, podríamos discutirlos privadamente*".

La lectura de esta nota en las actas del congreso de Berkeley me recordó, no se muy bien por qué, la nota que Fermat dejó sobre su famoso teorema en el margen estrecho, malditamente estrecho, de un ejemplar de la aritmética de Diofanto de Alejandría.

No sólo se trata de enseñar bien, también deben aprenderse bien. No sólo cuenta la calidad del producto y las aptitudes del maestro, sino algo mucho más difícil y sutil, el buen aprendizaje. Sin embargo en la llamada de Polya hay algo que puede pasar desapercibido en una primera lectura, *mejorar la mente de los alumnos*. La mente en sentido amplio, no sólo las capacidades matemáticas. Polya además lanza un reto, qué puede hacer un profesor de matemáticas para conseguir ese objetivo. Hay un desplazamiento, respecto de qué es importante en la educación matemática, desde la propia matemática a algo no muy definido como es la mejora de la capacidad mental de los alumnos a través de la enseñanza de la matemática.

El segundo invitado de honor a una conferencia plenaria es H. Freudenthal². El título "Major Problems of Mathematics Education". Así comenzó H. Freudenthal su intervención: *"Perdonadme, no fui yo quién eligió este tema, aunque cuando se me propuso, experimente un gran reto. Un reto, de verdad, pero para ser sinceros no como para emular a D. Hilbert, quién anunció sus famosos 23 problemas de matemáticas en el congreso internacional de matemáticas celebrado en París en 1900, que tanto influyeron el desarrollo y curso de las investigaciones matemáticas a lo largo de este siglo..."*

Para a continuación rechazar el camino seguido por Hilbert y considerar como su centro de interés los problemas que surgen en la educación matemática como una actividad social y no sólo como campo de investigación educativa. Creo que es importante y clarificadora esta toma de postura de Freudenthal, pues a continuación entra de lleno en el problema que considera, no más importante, pero sí más urgente: *Lo que es un problema es cómo formularlo correctamente y sin errores .. Why can Johnny not do arithmetic?*, parodiando el título de un famoso libro de M. Kline que aquí fue traducido como El Fracaso de la Matemática Moderna, para preguntarse si suena sexista tal cuestión y si no sonará más sexista aún si la formula como *Why can Mary not do arithmetic?*, pues esta última formulación sugeriría que las niñas son mucho peores que los niños en aritmética. Por último Freudenthal reformula la pregunta de forma más concreta *Why can Jennifer not do arithmetic?*, Jennifer no es un ser abstracto, es una alumna que a los ocho años tenía graves fallos en aritmética y que habían desaparecido a la edad de once años, después de una atención particularizada.

En contra del planteamiento general que encierra la pregunta *Why can Johnny not do arithmetic?* Freudenthal opta por un enfoque particular, así, la pregunta *Why can Jennifer not do arithmetic?* tiende a

plantear un problema particular, individual, que permita abordar el problema personal que Jennifer tiene con la aritmética y sobre todo a profundizar en qué aspectos del aprendizaje de Jennifer la han conducido al fracaso.

Tanto Polya como Freudenthal sitúan en centro de atención sobre el aprendizaje, el primero solicitando de los profesores un compromiso con el aprendizaje de sus alumnos hacia la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales en el sentido más amplio; el segundo en concretar, particularizar los problemas derivados de la enseñanza y en investigar los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos, y obtener ejemplos paradigmáticos de diagnosis y prescripción de los mismos. Freudenthal hace una llamada a la conciencia de todos los profesores e investigadores para que estos ejemplos se registren y se transmitan, de tal forma que unos puedan aprender de los otros y se gestione de forma efectiva el conocimiento en educación matemática.

Por lo que respecta a las habilidades básicas ya había en marcha varios proyectos y equipos de investigadores trabajando en este ámbito en la enseñanza primaria o básica. Durante la década de los ochenta y lo que va de los noventa se han publicado informes y artículos al respecto, sin embargo, los profesores de medias seguimos año tras año lamentándonos de los mal que llegan nuestros alumnos al instituto.

Y llega el año triunfal de 1982... "EL CAMBIO"... tan esperado...

En Octubre de 1983 comienza la mal llamada "experimentación" de la Reforma con la puesta en marcha del Bachillerato Experimental. En un principio, la idea es bien acogida por numerosos grupos de profesores. Construir un curriculum desde la base, desde la práctica diaria del aula, dando respuesta a lo que es "básico" para una enseñanza obligatoria.

Muchos nos sentimos como si hubiésemos tomado el poder... desde la base hacia arriba... construiremos un nuevo programa, curriculum suena a jerga pedagógica. Sólo se necesita un programa para hacer la "revolución"... y mucho voluntarismo... todas las horas y esfuerzos que hagan falta... por fin vamos a poder realizar algo grande y además nuestro.

Los borradores de los múltiples encuentros entre profesores de los centros experimentales y el equipo coordinador del Ministerio da a luz un documento oficial que se publica en 1985³. En la introducción de dicho documento se establecen los presupuestos didácticos de la Reforma:

...las EE.MM actuales están estructuradas en torno a un cuerpo de conocimientos a veces muy alejados de la realidad, excesivamente teóricos y distribuidos en compartimientos estancos, sin que existan apenas intentos de coordinación o globalización. Es cierto que

esta situación se ve superada muchas veces por el trabajo del profesorado y las experiencias de grupos que han iniciado hace ya tiempo la renovación; precisamente, esta reforma pretende generalizar los avances e incidir sustancialmente, entre otros, en los siguientes aspectos:

1. Atención preferente a la consecución de objetivos educativos que trasciendan el campo de las asignaturas.
2. Definición de una metodología activa.
3. Replanteamiento del sentido y el alcance de los contenidos.
4. Aproximación interdisciplinar entre las materias.
5. Revisión del sentido de la evaluación como instrumento de aprendizaje.

A destacar los puntos primero y quinto. En el primero la llamada de atención a la consecución de unos objetivos educativos que trasciendan el campo de las asignaturas se concretará más tarde en el L.O.G.S.E. en las capacidades que encierran los Objetivos Generales de Etapa y Área. En el quinto punto se hace una llamada a revisar la evaluación, el problema central para muchos, y se enfatiza su utilidad como instrumento de diagnóstico y regulación del aprendizaje.

A finales de Mayo de 1984 se celebra en Madrid el Simposium "La enseñanza de la matemática a debate" convocado por la Subdirección Gral. de Perfeccionamiento del Profesorado. En la presentación de las actas se hace referencia a cierto agotamiento y a la sensación que algunos tenían de haber tocado techo, después de múltiples encuentro locales y de celebradas tres JAEM, en las posibilidades de intercambio y enriquecimiento mutuos, para afirmar a continuación que el Simposio constituyó una forma de buscar otras alternativas a esta situación. Yo más bien creo que al simposio se fue a presentar las alternativas y algunas otras cuestiones que quedaron entre bambalinas. No debemos olvidarnos que en ese año, todavía no se había decidido como iban a quedar configurados los ciclos educativos en la Reforma, no está de más recordar que por aquel tiempo la experimentación se llevaba a cabo separadamente en EGB y en Medias.

Pues bien, el grupo Cero de Valencia da un golpe de mano y presenta un proyecto que define todo un ciclo educativo⁴.

En primer lugar toda una declaración de intenciones: "el centro de gravedad de la enseñanza de las matemáticas ha de estar más en el alumno que en la materia".

Para continuar con toda una definición de lo que significa para el grupo la enseñanza y el aprendizaje.

Aprender y enseñar: aprender tiene que ver con construir, es decir dotar de significado; enseñar tiene que ver con activar funcionamientos, activar capacidades.

La metodología por la que optan es la del *conflicto cognitivo*, ampliamente difundida y promocionada por los trabajos del Shell Centre de la Universidad de Nottingham en Inglaterra, a la que ellos denominan "Diagnostic Teaching".

Esta toma de postura les lleva de forma coherente a plantear los objetivos generales de la educación matemática no sólo a corto sino a largo plazo, con el énfasis puesto en el desarrollo de actitudes personales:

A largo plazo: "El hecho de desplazar de la materia al alumno el centro de gravedad en la enseñanza de las matemáticas significa activar de manera expresa el desarrollo de actitudes personales ..."

Una vez que se han establecido el marco general pasan a abordar la parte más espinosa de todo currículum.

Los contenidos: cuatro categorías: Hechos, Algoritmos y técnicas, Estructuras conceptuales y Estrategias Generales.

Esta última categorización tomada del *informe sobre la investigación*⁵, que Bell y otros prepararon como requerimiento de la comisión que daría posteriormente origen al famoso informe Cockcroft⁶.

Como se ve no se presenta una lista de conceptos matemáticos como cabría esperar. Esa categorización se trae sobre la mesa para apoyar la metodología, anteriormente señalada, y se utiliza como argumento principal para apoyar una enseñanza basada en la resolución de problemas y en el planteamiento de investigaciones. Señalándose que "lo esencial de una investigación es que el alumno ha de hacerse preguntas que determinarán el camino que va a seguir en su trabajo y ha de tomar decisiones que configuran las posibilidades que estas preguntas abran".

El marco para el currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria está empezado. A destacar la importante influencia de la literatura inglesa en educación sobre este diseño.

Una publicación posterior del grupo⁷ recogió de forma más amplia esta filosofía y se completaba con multitud de actividades para llevarla a cabo. Sinceramente pienso que la influencia posterior de este documento, aún sin evaluar, a sido bastante grande. Incluso me atrevería a decir que se adelantaron al Ministerio, por lo menos en publicación por escrito, de la definición de la etapa que hoy conocemos como Secundaria Obligatoria tanto en la filosofía de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como en la definición del segmento de edad que comprendería.

Para finalizar, pienso que desde la claridad del objetivo de enseñar matemáticas, modernas o de las de siempre, se ha llegado a plantear como prioritario el desarrollo de capacidades y el atender más el aprendizaje de los alumnos, quedando la matemática relegada a un segundo plano. Quizás esta conclusión sea la que llena de desasosiego a mucho profesores de medias. Muchas de las propuestas actuales de la L.O.G.S.E derivan de la investigación en didáctica llevada a cabo a nivel internacional y fundamentalmente desde el ámbito anglosajón. También creo que los hallazgos de la investigación no pueden llegar directamente al aula, su aplicación no es inmediata y ni siquiera se puede pensar en tal aplicación a corto plazo.

Quedan muchos hallazgos de la investigación por articular de forma coherente en un curriculum, sobre todo en el segmento educativo terminal de la enseñanza media. No sólo con un documento y con recomendaciones se puede llevar a cabo una reforma. Hay todo un espacio vacío entre los investigadores puros y los profesores, ¿ocupará alguien ese espacio?.

El balance sobre la contribución de los grupos y sociedades a la innovación en didáctica de las matemáticas después de estas dos décadas transcurridas desde el ya lejano 1975 está por hacer. Repito, que a mi modo de ver, la mayor contribución realizada ha sido el transmitir la información que a nivel internacional se ha desarrollado sobre el campo de la didáctica de las matemáticas. En este sentido, los grupos y sociedades ocuparon un lugar y asumieron una función que ninguna instancia oficial, Universidad o Ministerio de Educación, cumplían.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Hilton, P (1976). Education in Mathematics and Science Today: The Spread of False Dichotomies. En: *Proceedings of ICME 3*. Karlsruhe.
2. S.A.E.M. (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Traducción de "*Curriculum and Evaluation Standards for school mathematics*" NCTM, 1989.
3. Polya, G. (1983). Mathematics Improves the Mind. En Zweng, M et al (editores). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser.
4. Freudenthal, H. (1983). Major Problems of Mathematics Education. En Zweng, M et al (editores). *Proceedings of the fourth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser.
5. Hacia la Reforma. I. Documentos. Dirección Gral de EEMM. Servicio de publicaciones. M.E.C. 1985.
6. Carrillo, María Elisa (1984). "*Ensayos para un aprendizaje con objetivos a largo plazo*" En La enseñanza de la matemática a debate. MEC.
7. Bell, A.W., Costello, J. & Küchermann, D.E. (1983). A Review of Research in Mathematical Education: Part A, Research on Learning and Teaching. NFER-NELSON.
8. Informe Cockcroft (1985). Las Matemáticas sí cuenta. Servicio de Publicaciones del M.E.C.
9. Grupo Cero (1984). De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de matemáticas. Valencia. Edición de los autores.